

Kapitel 3

Magnetostatik

3.1 Einführende Versuche

Wir beginnen die Magnetostatik mit einigen einführenden Versuchen. Wenn wir - als für uns neues und noch unbekanntes Material - zwei **”Stabmagnete”** wie in Abb. 3.1 in verschiedenen Positionen gegeneinanderhalten, so könnten wir gemäß Kapitel 1 annehmen, wir würden zwei Ferroelektrete beobachten. Die Kraftwirkung (Abstandsabhängigkeit, Abhängigkeit von der Orientierung der Proben) wäre die gleiche.

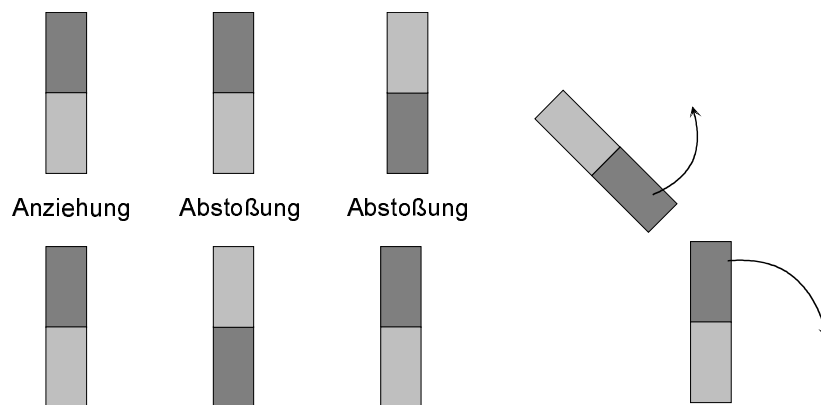


Abbildung 3.1: Kraftwirkungen zwischen zwei Stabmagneten

Allerdings wäre es etwas seltsam, dass die Kräfte zwischen den beiden Proben nicht mit der Zeit nachlassen (Neutralisation durch freie Ladungen aus der Luft). Daher liegt es nahe, die Kraft zwischen den neuen Proben und etwa einem durch Reibungselektrizität aufgeladenen Kunststoffstab zu untersuchen. Wir stellen fest, dass der geladene Kunststoffstab (abgesehen von schwachen Effekten auf Grund von Influenz) keine Kraft auf den Stabmagnet ausübt, wohl aber auf einen

zweiten geladenen Kunststoffstab. Ganz offensichtlich beobachten wir zwischen den Stabmagneten eine neue Kraft, die nichts mit elektrostatischen Kräften zu tun hat.

Diese neue **magnetische Kraft** wirkt wie die Coulomb-Kraft zwischen räumlich voneinander getrennten Körpern (den Stabmagneten). Es liegt also nahe, in Analogie zum elektrischen Feld **magnetische Feldlinien** einzuführen und diese abzubilden. Dies gelingt nicht mit Weizengries, sondern durch Eisenfeilspäne¹.

Wir bestreuen einen auf einer Glasplatte liegenden Stabmagneten mit den Eisenfeilspänen. Die Anordnung wird durch Schlagen mit einem kleinen Hammer in Vibration versetzt. Nach kurzer Zeit ordnen sich die Eisenfeilspäne zu Linien an, die praktisch identisch zu den Feldlinien eines elektrischen Dipols aussehen (Abb. 3.2)

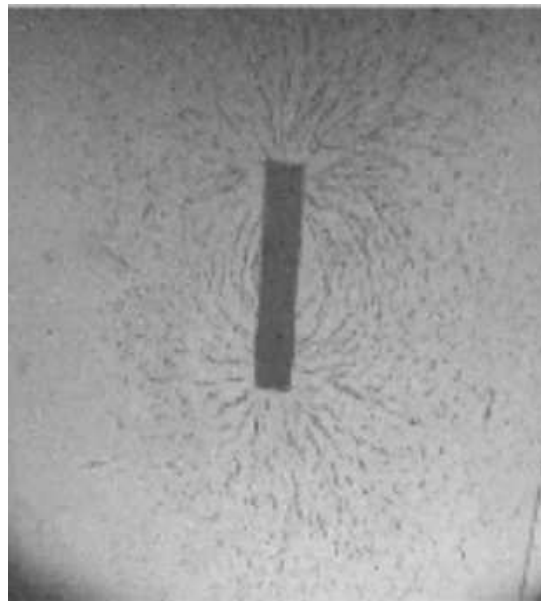


Abbildung 3.2: *Feldlinien um einen Stabmagneten (Dekoration mit Eisenfeilspänen).*

Wir bilden ebenfalls die Feldlinien zwischen zwei Stabmagneten ab, die so ausgerichtet sind, dass sie sich abstoßen bzw. anziehen (Abb. 3.3).

Wieder sehen die Feldlinien sehr ähnlich aus wie wir es für zwei parallel bzw. antiparallel angeordnete elektrische Dipole erwarten würden. Die Stabmagneten stellen ganz offensichtlich **magnetische Dipole** dar.

¹ Die genaue Wechselwirkung zwischen den Eisenfeilspänen und dem Stabmagneten werden wir etwas später beschreiben.

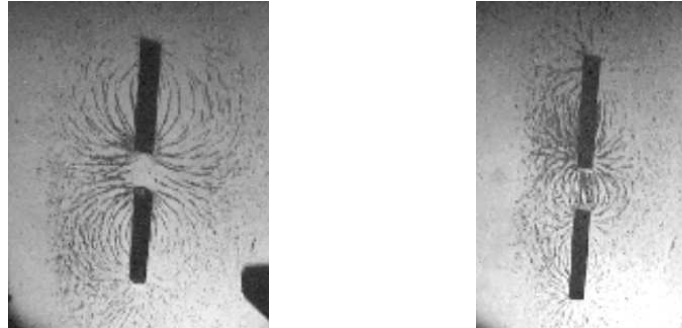


Abbildung 3.3: Feldlinien zwischen zwei Stabmagneten (Dekoration mit Eisenfeilspänen).

Im Prinzip liegt es jetzt nahe, nach **magnetischen Monopolen** (d. h. magnetischen Punktladungen) zu suchen. Bis heute war die Suche nach solchen Monopolen jedoch erfolglos. **Es scheint sie nicht zu geben.** Damit wird auch verständlich, dass – im Gegensatz zu den Ferroelektronen – die Stabmagneten nicht nach kurzer Zeit neutralisiert werden.

Wir können den Feldlinien um die magnetischen Dipole eine Richtung geben. Dazu definieren wir ein Stabende als "Nord", das andere als "Süd" und sagen, das Feld verläuft von "Nord" nach "Süd".

Um jetzt weiterzukommen, sollten wir die Kraftwirkung zwischen Magneten und ganz unterschiedlichen Objekten untersuchen. Dabei werden wir über kurz oder lang auch ein "Schlüsselexperiment" durchführen, bei dem wir einen stromdurchflossenen Draht und einen Magneten gegeneinanderhalten. Wir beobachten zunächst eine Anordnung, bei der der Draht und der Magnet in einer Ebene angeordnet sind (Abb. 3.4). Nach Einschalten des Stroms stellt sich der Magnet senkrecht zum Draht.

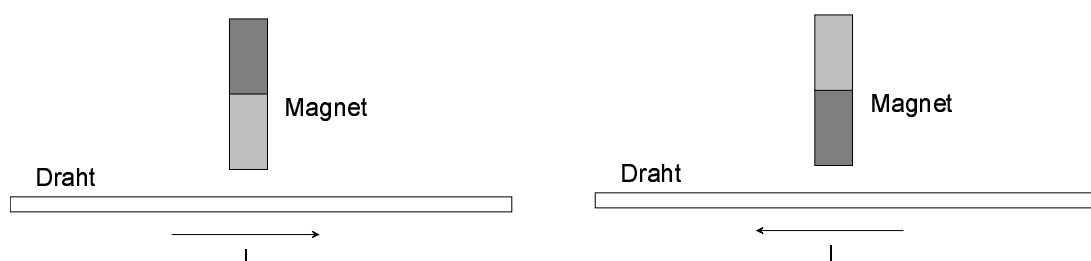


Abbildung 3.4: Kraftwirkung zwischen einem Draht und einem Stabmagneten: Draht in einer Ebene mit dem Magneten. Der Magnet richtet sich senkrecht zur Drahtachse aus.

Wir stellen jetzt den Draht senkrecht (Abb. 3.5). Die Magnetnadel richtet

sich stets tangential zum Draht aus. Polen wir die Stromrichtung um, so dreht sich die Magnetnadel um 180° .

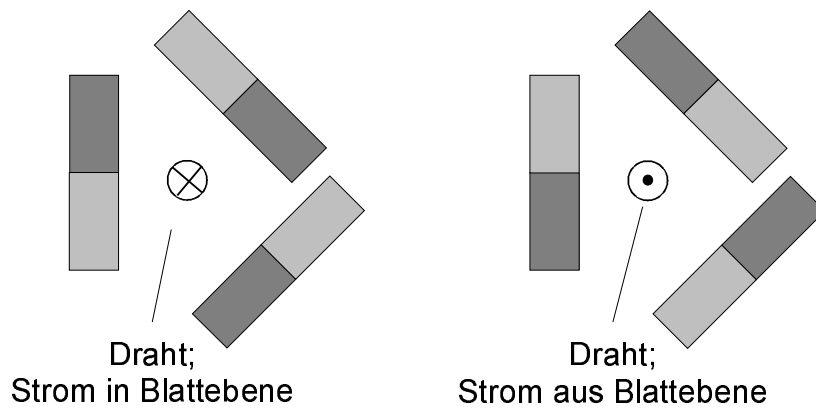


Abbildung 3.5: *Kraftwirkung zwischen einem Draht und einem Stabmagneten (Magnet in drei verschiedenen Positionen): Draht senkrecht zum Magneten. Der Magnet richtet sich tangential zur Drahtachse aus.*

Wir bestreuen weiter die Drähte der Abb. 3.4 und 3.5 mit Eisenfeilspänen. Beim parallel zur Beobachtungsebene (Glasplatte) ausgerichteten Draht ist wenig zu erkennen; um den senkrecht zur Glasplatte stehen den Draht bilden sich dagegen **kreisförmige Feldlinien** aus (vgl. Abb. 3.6).

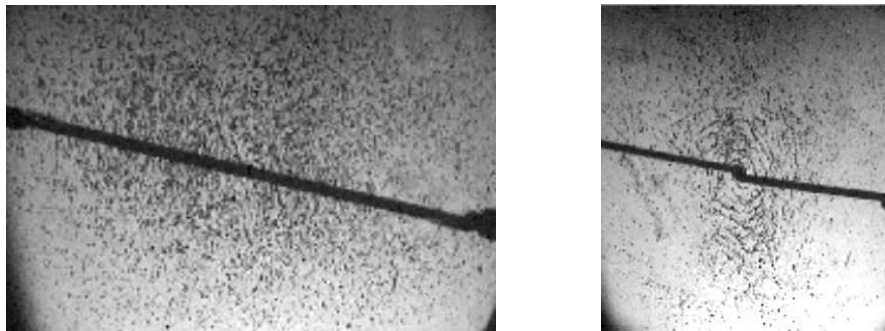


Abbildung 3.6: *Feldlinien um einen stromdurchflossenen Draht. Links: Draht parallel zur Beobachtungsebene (Glasplatte) gespannt; Rechts: Draht senkrecht zur Glasplatte gespannt (Dekoration mit Eisenfeilspänen)*

Die Orientierung der Stabmagneten bei Stromfluss ist jetzt leicht zu verstehen. Der Magnet orientiert sich parallel zu den Feldlinien um den Draht, also wie in den Abb. 3.4 und 3.4 angedeutet. Da sich der Stabmagnet bei Stromumkehr im Draht um 180° dreht, müssen wir annehmen, dass sich auch die Richtung des Feldes bei Stromumkehr umdreht.

Im nächsten Experiment beobachten wir qualitativ die **Kraftwirkung zwischen zwei stromdurchflossenen, parallel zueinander gespannten Drähten**. Wir stellen fest: Fließt der Strom in den Drähten in die gleiche Richtung, so ziehen sich die Drähte an, fließt der Strom in entgegengesetzte Richtung, so stoßen sich die Drähte ab.

Wir untersuchen jetzt die **magnetische Kraft** quantitativ. Hierzu bringen wir zunächst einen Leiter zwischen die Pole eines Hufeisenmagneten wie in Abb. 3.7 skizziert. Die Feldlinien verlaufen zwischen den Polen mehr oder weniger homogen, wie in der Abbildung qualitativ eingezeichnet. Wir demonstrieren diesen Feldverlauf ebenfalls durch Dekoration mit Eisenfeilspänen (s. Abb. 3.8)

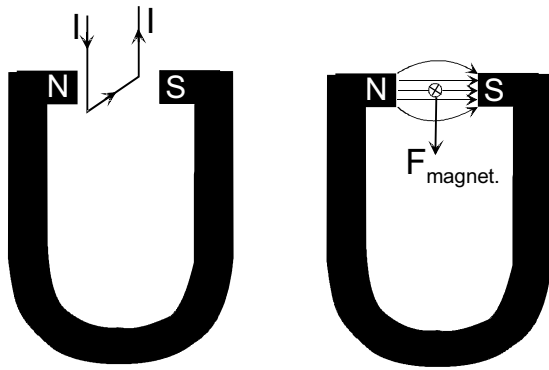


Abbildung 3.7: Kraftwirkung zwischen einem stromdurchflossenen Draht und einem Hufeisenmagnet. Oben: Geometrie; unten: Feldlinien und Kräfte

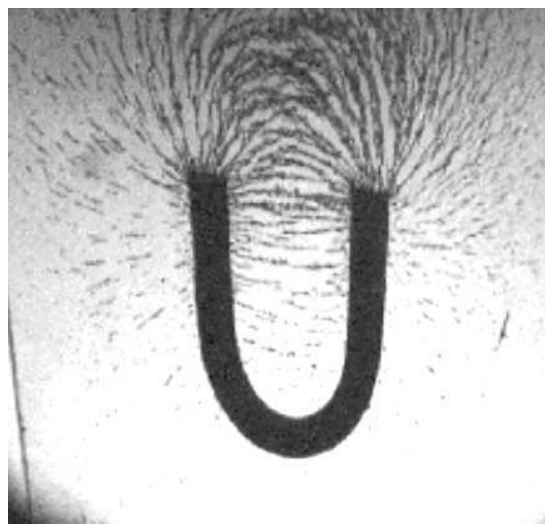


Abbildung 3.8: Feldverlauf zwischen den Polen eines Hufeisenmagneten: Dekoration mit Eisenfeilspänen

Wenn wir jetzt durch den Draht einen Strom I fließen lassen, so wird der Draht **senkrecht zum Feld des Magneten** und **senkrecht zum Strom** nach unten

gezogen. Der Draht kann durch eine Federkraft wieder in die Ausgangsposition angehoben werden. Wir benötigen hierzu eine Kraft F_1 . Verdoppeln (verdreifachen) wir den Strom, so verdoppelt (verdreifacht) sich diese Kraft. Ihr Betrag ist also proportional zum Strom. Bei Stromumkehr kehrt sich außerdem das Vorzeichen der Kraft um, sie wirkt jetzt "nach oben".

Hiermit haben wir bereits eine Reihe von Beobachtungen gemacht, die magnetische Kräfte charakterisieren:

- sie wirken zwischen "magnetischen" Materialien (Stabmagnete)
- es gibt keine magnetischen Monopole
- es existieren magnetische Kräfte zwischen den Stabmagneten und stromdurchflossenen Leitern, sowie zwischen stromdurchflossenen Leitern
- um stromdurchflossene Drähte baut sich ein Magnetfeld auf, das senkrecht zum Draht (bzw. zum Strom) orientiert ist.
- Ein Leiter erfährt in einem homogenen Magnetfeld eine Kraft, die senkrecht sowohl zur Feldrichtung als auch zur Stromrichtung ist. Ihr Betrag ist proportional zum Strom durch den Leiter.

Im nächsten Abschnitt werden wir nun auf der Basis der eben vorgestellten Beobachtungen zu einer mathematischen Formulierung der (statischen) Feldgleichungen und der Kraftgesetze gelangen.

3.2 Gesetze von Biot-Savart und Ampere

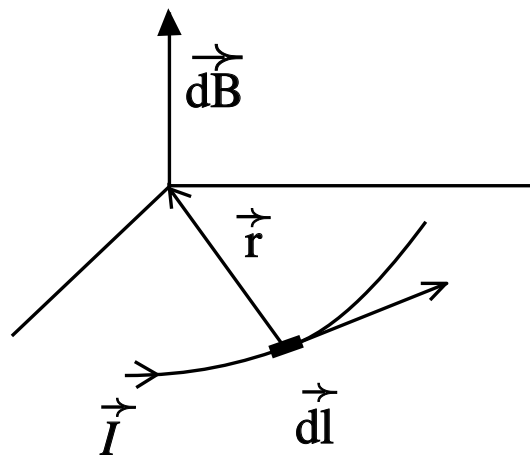


Abbildung 3.9: Beitrag eines stromdurchflossenen Leiterelementes $d\vec{l}$ zur magnetischen Induktionsdichte im Koordinatenursprung

Aus den vorggeführten Experimenten können wir die folgenden Schlussfolgerungen ziehen:

- Es gibt offensichtlich ein Feld $\vec{B}(\vec{r})$, dessen Feldlinien durch Eisenspäne dargestellt werden. Diese Feldlinienbilder der Eisenspäne sehen ähnlich aus, wie die des elektrischen Feldes, die wir durch sich polarisierenden Weizenries dargestellt haben. Es ist aber offensichtlich ein anderes Feld. Diese Feld $\vec{B}(\vec{r})$ nennen wir **Magnetische Induktion** oder auch **Magnetische Flussdichte**.
- Stromdurchflossene Leiter verursachen Feldlinien der Magnetischen Induktion. Die Feldlinien bilden Kreise um den Leiter in der Ebene senkrecht zum stromdurchflossenen Leiter
- In einem Feld Magnetischer Flussdichte wirken Kräfte auf stromdurchflossene Leiter

In der Elektrostatik sind die elektrischen Ladungen Ursache des Feldes aber auch Anknüpfungspunkt für die elektrischen Kräfte. Für die Magnetische Induktion übernehmen Ströme diese Funktion: sie sind sowohl Ursache des Feldes als auch Objekt der Kräfte, die mit der Magnetischen Induktion verknüpft sind. Wie wir im folgenden sehen werden, sind aber die genauen Zusammenhänge z.B. zwischen den Ursachen und den Feldern in der Magnetostatik und der Elektrostatik etwas unterschiedlich.

Das Gesetz von Biot-Savart gibt an, welchen Beitrag $d\vec{B}$ ein infinitesimales Stück dl einer Leiterschleife, durch die ein Strom I fließt, zur magnetischen Flußdichte \vec{B} an einer bestimmten Position liefert (siehe auch Abbildung 3.9):

$$d\vec{B} = k I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (3.1)$$

Dabei steht $d\vec{l}$ für den betrachteten infinitesimalen Teil des stromdurchflossenen Leiters. Die Richtung dieses infinitesimalen Vektors $d\vec{l}$ ist durch den Tangentialvektor an die Leiterschleife, der in Richtung des Stromes I zeigt, gegeben. Ausserdem steht in diesem Biot-Savart'schen Gesetz \vec{r} für den Verbindungsvektor vom Leiterstück $d\vec{l}$ zum Punkt, an dem wir die magnetische Induktionsdichte berechnen wollen, und r ist der Betrag dieses Vektors. Die Konstante k werden wir im Folgenden durch

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

ersetzen und auf die Definition von μ_0 etwas später eingehen. Das Biot-Savart'sche Gesetz beinhaltet also Information sowohl über die Stärke als auch über die Richtung des vom Stromelement $I d\vec{l}$ erzeugten Magnetfeldes:

$$\begin{aligned} |d\vec{B}| &\sim I, dl, \frac{1}{r^2} \\ \text{Richtung von } d\vec{B} &\sim d\vec{l} \times \vec{r}. \end{aligned}$$

Die Richtung von $d\vec{B}$ steht also senkrecht auf der von $d\vec{l}$ und dem Abstandsvektor \vec{r} aufgespannten Ebene („rechte-Hand-Regel“). Das Biot-Savart'sche Gesetz hat eine grundlegende Bedeutung, da es den Zusammenhang zwischen Strömen und den von diesen Strömen erzeugten Magnetfeldern angibt.

Um diesen Zusammenhang zu verdeutlichen, wollen wir zunächst das Biot-Savart'sche Gesetz in einem Beispiel anwenden. Gegeben sei ein unendlich langer Draht, durch den ein Strom I fließt. Mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes soll nun die magnetische Flussdichte \vec{B} im Abstand R von diesem Draht berechnet werden. Wir definieren unser Koordinatensystem so, dass der Draht entlang der z-Achse liegt und der Punkt, an dem wir die magnetische Induktionsdichte berechnen wollen in der $x - y$ Ebene liegt, also die kartesische Komponente $z = 0$ besitzt. Da der Draht unendlich lang ist, müssen die Beiträge der Stromelemente $I d\vec{l} = I \hat{e}_z dz$, die sich am Ort \vec{r} befinden, summiert werden durch eine Integration über

die z-Achse:

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= \int d\vec{B} \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{R \hat{e}_z \times \hat{e}_R}{\sqrt{z^2 + R^2}^3} \\
 &= \hat{e}_\perp \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}^3} \\
 &= \hat{e}_\perp \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \frac{2}{R^2}.
 \end{aligned}$$

\hat{e}_\perp ist dabei der Einheitsvektor, der senkrecht zur z-Achse und zur Verbindungslinie vom Leiter (Koordinatenursprung) zum Punkt, an dem wir \vec{B} berechnen wollen, steht. Dieses Ergebnis werden wir im Abschnitt über die Differentialgleichung der Magnetostatik noch auf eine etwas elegantere Art gewinnen.

Der Begriff Magnetostatik scheint einen Widerspruch in sich selbst zu enthalten. Wir haben bereits diskutiert, dass Magnetfelder durch Ströme, also bewegte Ladungen, erzeugt werden. Was beinhaltet also die Einschränkung Magnetostatik?

Unter „Magnetostatik“ sollen im folgenden solche Magnetfelder verstanden werden, die durch *stationäre Ströme* verursacht sind. Betrachten wir zur Definition eines stationären Stromes ein Volumen V , durch das ein Strom \vec{j} fließt. Damit es im Volumen keine „Stauungen“ gibt, d.h. damit es in V keine Ladungsänderungen gibt, soll der durch die Oberfläche einfließende Strom gleich dem ausfließenden sein. Für die Oberfläche von V gilt also:

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial(V)} \vec{j} d\vec{f} &= 0 \\
 &= \int_V \operatorname{div} \vec{j} d^3\vec{r},
 \end{aligned}$$

wobei die letzte Zeile durch Anwenden des Gaußschen Satzes gewonnen wurde. Da diese Forderung für alle Volumina V erfüllt sein soll muss also für die Ströme der Magnetostatik gelten:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{j} = 0.} \quad (3.2)$$

Ein Strom durch einzelne bewegte Ladungsträger ist damit zunächst einmal nicht stationär. In entsprechend kurzen Zeitintervallen bewegen sich einzelne Ladungsträger in bestimmte Volumina hinein ohne, dass andere sich hinausbewegen. Betrachtet man die Phänomene aber gemittelt über eine entsprechende Zeitperiode kann es auch für die Bewegung einzelner Ladungsträger, also auch im mikroskopischen Bereich stationäre Ströme geben, die (3.2) erfüllen.

Welche *Kräfte* werden durch die magnetische Induktion auf stromdurchflossene Leiter erzeugt? Wieder betrachten wir eine Stromschleife, durch die der Strom I_1 fließt. Sie soll sich in einem Magnetfeld \vec{B} befinden. Experimentell findet man, dass der infinitesimale Anteil der Kraft, $d\vec{F}$, auf ein infinitesimales Leiterlement $d\vec{l}$ der Schleife gegeben ist durch:

$$d\vec{F} = I_1 d\vec{l} \times \vec{B}, \quad (3.3)$$

wobei \vec{B} für die magnetische Induktionsdichte am Ort des infinitesimalen Leiterelementes steht. Diese Beziehung bezeichnet man als das erste Amperesche Gesetz. Auch dieses Gesetz beinhaltet eine Aussage über die Stärke und die Richtung der Kraft auf das Leiterelement:

$$\begin{aligned} |d\vec{F}| &\sim I_1 |d\vec{l}| |\vec{B}| \\ d\vec{F} &\sim d\vec{l} \times \vec{B}. \end{aligned}$$

Die Kraft, die auf die gesamte Stromschleife ausgeübt wird, erhält man durch Aufintegrieren der einzelnen Beiträge der Stromelemente:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{B} \\ &= \int \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) d^3\vec{r}. \end{aligned}$$

In dem zweiten Teil dieser Gleichung steht $\vec{j}(\vec{r})$ für die Stromdichte der Stromverteilung am Ort \vec{r} .

Wie gross ist die Kraft auf *eine* mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegte Ladung q ? Ersetzt man im ersten Ampereschen Gesetz das Produkt

$$I_1 d\vec{l} = \frac{dq}{dt} d\vec{l} = dq \frac{d\vec{l}}{dt} = dq \vec{v}$$

und integriert die Ladungselemente dq zur Gesamtladung q , erhält man

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (3.4)$$

Dies ist die **Lorentz-Kraft** auf ein mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegtes Teilchen der Ladung q . Man erkennt, dass durch das Kreuzprodukt nur Geschwindigkeiten, die eine Komponente senkrecht zum Magnetfeld haben, einen Beitrag zur Lorentz-Kraft leisten.

Bevor nun die Eigenschaften dieser magnetischen Kräfte auf bewegte Ladungen oder Ströme diskutiert werden, wollen wir die Einheiten bestimmen, in denen die magnetische Induktionsdichte \vec{B} definiert ist. Dazu betrachten wir den Ausdruck (3.4) und stellen fest, dass die magnetische Induktionsdichte als Quotient

aus einer Kraft dividiert durch Ladung mal Geschwindigkeit gegeben ist. Bezeichnen wir die Maßeinheit der Kraft mit N für Newton, der Ladung mit C für Coulomb und der Geschwindigkeit mit m/s für Meter pro Sekunde, so liefert diese Dimensionsbetrachtung für die Maßeinheit der magnetischen Induktion

$$[B] = \frac{N s}{C m} = \frac{W s^2}{C m^2} = \frac{V A s}{A m^2} = \frac{V s}{m^2} = \text{Tesla}. \quad (3.5)$$

Bei dieser Umrechnung haben wir benutzt, dass die Energie $1 Nm = 1 Ws$ ist und ein Watt (W) auch durch Volt (V) mal Ampere (A) gegeben ist. Ausserdem ist der Strom von 1 Ampere gleich dem Fluss von 1 C pro Sekunde. Die Maßeinheit für die magnetische Induktionsdichte ist also das Produkt Volt mal Sekunde dividiert durch Meter zum Quadrat gegeben, eine Einheit, die den Namen **Tesla** trägt. Zur Veranschaulichung dieser Grösse sie darauf hingewiesen, dass das Magnetfeld der Erde am Äquator einer magnetischen Induktionsdichte von $3.7 \cdot 10^{-5}$ Tesla entspricht. Ein Magnetfeld von 1 Tesla ist also schon recht gross, kann aber im Labor gut realisiert werden.

Schon aus dieser Dimensionsbetrachtung können wir ersehen, dass durch die Definition der magnetischen Induktionsdichte keine unabhängigen Messgrössen auftreten. Das Tesla ist durch bereits bekannte Maßgrößen definiert. Deshalb kann auch die Proportionalitätskonstante k , beziehungsweise μ_0 im Biot-Savart'schen Gesetz (3.1) keine weitere Naturkonstante sein. Man definiert deshalb im SI System

$$\mu_0 := 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{V s}{A m}, \quad (3.6)$$

und benutzt die Konstante ϵ_0 , um die elektrischen Größen Coulomb C oder Ampere A mit den mechanischen Einheiten in Verbindung zu bringen.

Schickt man elektrisch geladene Teilchen in ein Magnetfeld, so wirkt auf sie die Lorentz-Kraft (3.4), die stets senkrecht auf ihrer Bewegungsrichtung steht. Aus der klassischen Mechanik ist bekannt, dass Körper, bei denen stets eine Kraft senkrecht zur Bewegungsrichtung wirkt, auf Kreisbahnen gezwungen werden. Im stationären Fall ist die Zentrifugalkraft dieser Kreisbewegung der geladenen Teilchen dann gleich der Lorentz-Kraft. Daraus erhält man den Radius R dieser Kreisbahn:

$$q v_{\perp} B = \frac{m v_{\perp}^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{m v_{\perp}}{q B}. \quad (3.7)$$

Dabei bezeichnet v_{\perp} die Komponente der Geschwindigkeit des geladenen Teilchens, die senkrecht zur magnetischen Induktionsdichte \vec{B} steht. Die Komponente von \vec{v} , die parallel zu \vec{B} steht, v_{\parallel} , hat ja keinen Einfluss auf die Lorentzkraft. Die geladenen Teilchen bewegen sich also insgesamt mit dieser Geschwindigkeit v_{\parallel} parallel zu den Magnetfeldlinien. Wegen der Lorentzkraft wird diese Bewegungskomponente überlagert durch die Bewegung auf der kreisförmigen Bahn

um die Magnetfeldlinien herum. Wirkt also neben der Kraft des Magnetfeldes keine weitere Kraft auf das geladene Teilchen, so bewegt es sich insgesamt auf eine schrauben- oder spiralförmigen Bahn entlang den Magnetfeldlinien.

Im folgenden sollen drei Anwendungsbeispiele für die Bewegung von geladenen Teilchen im Magnetfeld betrachtet werden.

1. Das **Magnetspektrometer**: Schickt man einen Ionenstrom unbekannter Zusammensetzung in ein homogenes Magnetfeld, so werden die Ionen auf Kreisbahnen abgelenkt. Gemäß (3.7) ist der Radius dieser Kreisbahn $R \sim (mv_{\perp})/q$. Es ergibt sich also eine Aufspaltung der Bahnen nach dem Quotienten Impuls/Ladung der Ionen. Auf diese Weise kann man verschiedene Ionensorten in den Reaktionen der Kern- und Teilchenphysik voneinander unterscheiden.
2. Der **Fusionsreaktor**: Im Gegensatz zur Kernspaltung, bei der durch Spalten von schweren Atomkernen Energie gewonnen wird, kann man durch Fusion von zwei leichten Kernen (Deuterium (^2H) plus Tritium (^3H) fusionieren zu einem Alph-Teilcheneben (^4He) plus einem Neutron) ebenfalls Energie gewinnen. Dieser Vorgang und ähnliche Reaktionen laufen im Innern der Sonne ab. Damit solche Fusionsprozesse stattfinden, müssen die Reaktionspartner bei grossem Druck und Temperatur zusammengebracht werden. Nur so kann die langreichweitige Coulombabstoßung der Wasserstoffkerne überwunden werden, so dass diese so nahe zusammenkommen, dass die kurzreichweitige starke Wechselwirkung eine Fusion ermöglicht. In der Sonne sorgt die Gravitation für den hohen Druck und die Temperatur wird durch die Fusionsreaktion selbst hoch gehalten. Bei den hohen Temperaturen sind die Wasserstoffatome ionisiert und liegen als *Plasma* von freien Elektronen und Atomkernen vor.

Nun würde jede andere Materie, die mit dem Plasma in Berührung gebracht wird, augenblicklich verdampfen. Das Plasma kann also nicht in einem „Gefäß“ aufbewahrt werden. Man hält das Plasma deshalb z.B. in einem Magnetfeld „gefangen“: In einem Tokamak wird durch spezielle Spulen ein ringförmiges Magnetfeld erzeugt, in dem die ionisierten Plasmateilchen auf Spiralbahnen um die Feldlinien des Magnetfeldes kreisen und wegen der ringförmigen Anordnung in diesem Ring bleiben. Auf diese Weise lassen sich Wechselwirkungen mit der Wand weitgehend ausschalten.

3. Magnetische „**Wände**“ oder „**Spiegel**“: Mit einem Magnetfeld, das zu einer Grenzlinie hin kontinuierlich stärker wird, lassen sich geladene Teilchen zur „Umkehr“ bewegen. Wegen (3.7) wird der Radius der Kreisbahn mit zunehmenden Magnetfeld, also je näher das Teilchen an die Grenzfläche

gelangt kleiner. So werden Teilchenbahnen, die weit weg von der Grenzfläche bei kleinem B nur eine leichte Krümmung zeigen, in der Nähe der Grenzfläche um 180 Grad umgelenkt.

Hall Effekt

Die Wirkungsweise der Lorentz-Kraft spielt auch beim sogenannten **Hall-Effekt** eine entscheidende Rolle. Der Aufbau zur Messung des Hall-Effektes ist schematisch in Abb. 3.10 dargestellt. Die Stromquelle im oberen Teil der Abbildung sorgt für einen Strom von Ladungsträgern in dem Leiterstück, das ausgeht im unteren Teil des Bildes dargestellt ist. Dieses Leiterstück befindet sich in einem Magnetfeld \vec{B} , das senkrecht zur Zeichenebene steht. Diese Induktionsdichte ist durch die "x" Zeichen dargestellt, was andeuten soll, dass \vec{B} in die Zeichenebene hinein weist. Diese magnetische Induktion wirkt über die Lorentz-Kraft auf die Ladungsträger und lenkt sie nach unten ab (gestrichelte Bahnen). Daraus ergibt sich ein Überschuss an positiven Ladungen am unteren Rand des Leiters im Vergleich zum oberen. Diese Ladungstrennung erzeugt ein elektrisches Feld \vec{E}_H . Das System ist im Gleichgewicht, wenn die Effekte der Lorentz-Kraft durch die aus \vec{E}_H resultierende elektrische Kraft kompensiert werden. In diesem Fall gilt für eine Ladung q

$$q E_H = q v B = \frac{q v n \Delta f}{n \Delta f} B \quad (3.8)$$

Im zweiten Teil der Gleichung wurden Zähler und Nenner mit dem Produkt aus der Ladungsträgerdichte n und der Querschnittsfläche des Leiters Δf multipliziert. Die Stärke des elektrischen Feldes kann man leicht bestimmen, indem man die Hall-Spannung U_{Hall} wie in Abb. 3.10 dargestellt misst und daraus mit $E_H = U_{Hall}/h$ (h ist die vertikale Ausdehnung des Leiterstückes bestimmt). Mit dem Ausdruck für den Strom $I = qv\Delta f$ ergibt sich aus (3.8)

$$E_H = \frac{1}{q n \Delta f} I B. \quad (3.9)$$

Man kann also durch Messung der Hall-Spannung U_{Hall} bei bekannter Induktionsdichte B die Ladungsträgerdichte eines Materials bestimmen. Ist diese Ladungsträgerdichte n bekannt, so kann (3.9) auch benutzt werden die Stärke der magnetischen Induktionsdichte \vec{B} zu bestimmen.

3.2.1 Experimente zur Lorentzkraft

Fadenstrahlrohr: Wir erzeugen einen Strahl von Elektronen mittels einer Glühkathode. Diese besteht aus einer Glühwendel, die auf hohe Temperaturen gebracht wird. Einige Elektronen haben hierbei eine so hohe kinetische Energie, dass sie die Kathode gegen die "Austrittsarbeit" W verlassen. Typischerweise beträgt

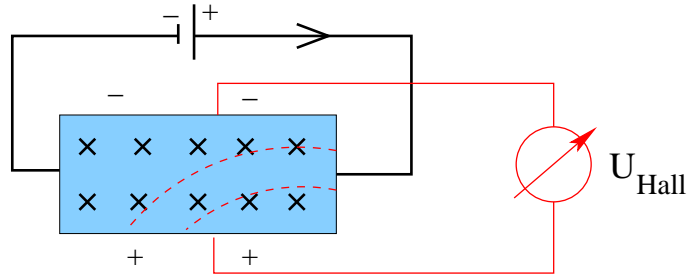


Abbildung 3.10: Schematischer Aufbau zur Messung der Hall-Spannung

W ein bis einige eV. Die Elektronen werden durch eine angelegte Spannung U von der Kathode "weggesaugt" und auf eine Energie eU beschleunigt. Für die Stromdichte gilt (ohne Beweis):

$$j = \text{const.} \cdot T^2 \cdot e^{-W/k_B T} \quad \text{Richardson-Gleichung} \quad (3.10)$$

Der Elektronenstrahl durchläuft anschließend ein räumlich (fast) konstantes Magnetfeld und wird durch die Lorentzkraft auf eine Kreisbahn gekrümmt. Ihr Radius ist $R = mv_{\perp}/eB$. Wir können v_{\perp} noch durch die Beschleunigungsspannung U ausdrücken. Die Elektronen erhalten eine kinetische Energie $mv_{\perp}^2/2 = eU$ bzw: $v_{\perp} = \sqrt{2eU/m}$. Hieraus erhalten wir: $R = m\sqrt{2eU/m}/(eB) = \sqrt{m/e} \cdot \sqrt{2U}/B$.

Hallsonde: Die Hallsonde besteht aus einem wenige mm^2 großen Chip, auf dem ein halbleitender InSb-Film aufgebracht ist (vgl. Abb. 3.11). In Halbleitern ist die Elektronendichte n um mehrere Größenordnungen niedriger als in Metallen, so dass die Hallkonstante $R_H = 1/nq$ wesentlich größer ist.

Auch ohne B -Feld messen die Spannungsabgriffe eine Spannung, die proportional zum Strom durch die Probe ist. Dies ist ein parasitärer Effekt, der dadurch entsteht, dass die Kontakte nicht exakt in transversaler Richtung angebracht sind. Man misst dadurch entsprechend dem Ohmschen Gesetz eine kleine Längskomponente der Spannung, die aber bei festem Strom I lediglich den Nullpunkt der Messung verschiebt und kompensiert werden kann.

Wir bringen jetzt die Sonde ins Magnetfeld. Die Querspannung wächst stark an und wechselt bei Umpolung des Magnetfelds ihr Vorzeichen bzgl. des oben diskutierten Nullpunkts. Hallsonden werden häufig als Magnetfeldsensoren für Felder im Bereich mT bis einige T eingesetzt. Man kann diese Sonden stark miniaturisieren und ganze Felder ("Arrays") aus vielen Sensoren auf der Oberfläche einer zu untersuchenden Probe anbringen.

Umgekehrt wird der Halleffekt eingesetzt, um die Hallkonstante R_H und damit insbesondere das Vorzeichen der Ladungsträger zu bestimmen. Beispielsweise bei

Halbleitern der Ladungstransport durch "Löcher" erfolgen. Dies sind in Analogie zu Gasblasen im Wasser fehlende Elektronen. Alle übrigen Elektronen bewegen sich so, als würde der Strom durch Ladungsträger mit positiver Ladung getragen.

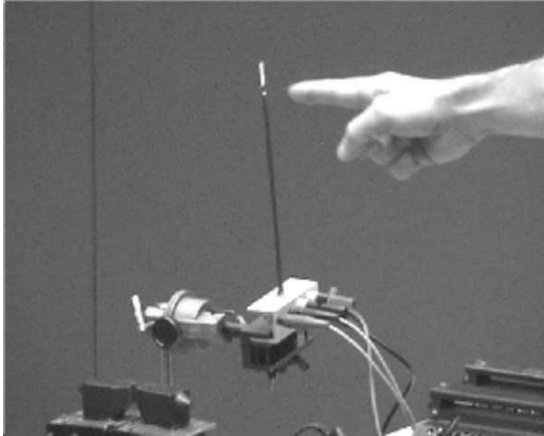


Abbildung 3.11: *Hallsonde*

3.3 Die Differenzialgleichungen der Magnetostatik

Ähnlich den Feldgleichungen des elektrostatischen Feldes soll nun das Vektorfeld der magnetischen Induktionsdichte der Magnetostatik durch seine Quellen ($\operatorname{div} \vec{B}$) und Wirbel ($\operatorname{rot} \vec{B}$) charakterisiert werden. Im vorigen Abschnitt haben wir das **Biot–Savartsche Gesetz** behandelt:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0 \vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

für den Beitrag eines Elementes $d\vec{l}$ (an der Position \vec{r}') einer Leiterschleife, durch die ein Strom I fließt, zur magnetischen Induktionsdichte \vec{B} an der Stelle \vec{r} (s. Abb. 3.12).

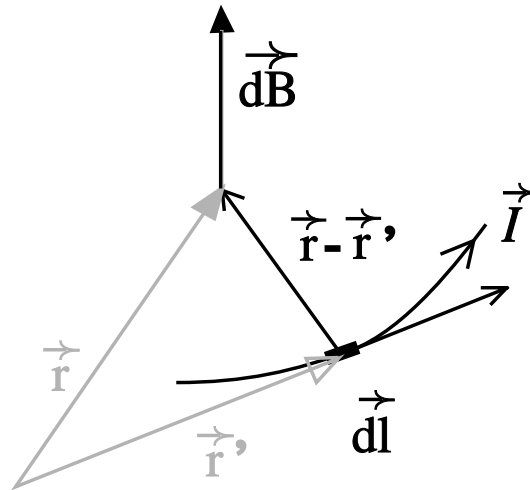


Abbildung 3.12: vom Stromelement $I d\vec{l}$ erzeugtes Feld $d\vec{B}$

Integration über alle Stromelemente $I d\vec{l}$ ergibt dann das gesamte Magnetfeld \vec{B} (erzeugt durch den Strom I in einer Leiterschleife, bzw. die Stromdichte \vec{j}) an der Stelle \vec{r} :

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times \vec{j}(\vec{r}') d^3r' \\ &= \vec{\nabla} \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{j}(\vec{r}') d^3r' \end{aligned}$$

letzteres gilt, da $\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ (siehe (1.33), die Ableitungen in $\vec{\nabla}$ beziehen sich hier auf die Koordinaten von \vec{r} , nicht von \vec{r}' so dass $\vec{\nabla}$ vor das Integral

gezogen werden kann) gilt. Damit haben wir gezeigt, dass

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}), \quad (3.11)$$

mit dem **Vektorpotenzial**

$$\vec{A}(\vec{r}) := \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{j}(\vec{r}') d^3r' \quad (3.12)$$

Daraus können wir nun direkt die Grundgleichungen der Magnetostatik für die Quellen und die Wirbel, d.h. die Divergenz und die Rotation von \vec{B} herleiten:

Für die Divergenz gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x(\vec{r}) \\ A_y(\vec{r}) \\ A_z(\vec{r}) \end{pmatrix} \right] \\ &= \partial_x [\partial_y A_z - \partial_z A_y] + \partial_y [\partial_z A_x - \partial_x A_z] + \partial_z [\partial_x A_y - \partial_y A_x] \\ &= 0; \end{aligned}$$

wobei wir mit $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ die partiellen Ableitungen nach den kartesischen Koordinaten des Ortsvektors \vec{r} und mit A_x, A_y und A_z die kartesischen Komponenten des Vektorfeldes \vec{A} bezeichnet haben. Zusammengefasst ergibt sich also:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0} \quad (3.13)$$

Das bedeutet:

- Da die Divergenz für die Quellstärke steht, gibt es keine magnetischen Quellen oder Senken (Im Gegensatz zur Elektrostatik !)
- also gibt es auch keine Startpunkte (bzw. Endpunkte) für Magnetfeldlinien.
- Diese Differentialgleichung für das Vektorfeld \vec{B} beinhaltet also, dass es in der Magnetostatik keine magnetischen Ladungen oder Monopole gibt, die den elektrischen Ladungen der Elektrostatik entsprechen.

Gleichung (3.13) ist die erste Differentialgleichung der Magnetostatik. Sie entspricht der Gleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ in der Elektrostatik.

Für die Berechnung der Rotation wenden wir den Grassmannschen Entwicklungssatz

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (3.14)$$

auf die Vektoren $\vec{\nabla}$ und \vec{A} . Im Gegensatz zu einfachen Vektoren muss allerdings in diesem Fall der Vektoroperatoren $\vec{\nabla}$ auf die Reihenfolge der Faktoren geachtet werden; die partiellen Ableitungen in $\vec{\nabla}$ wirken auf die rechts stehenden Komponenten von \vec{A}

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \\ &= \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \int \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'}_{a)} - \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') \Delta_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'}_{b)}\end{aligned}$$

wobei $\vec{\nabla}$ und Δ an (\vec{r}') "vorbeigezogen" werden konnte, da $\vec{j}(\vec{r}')$, also unabhängig von \vec{r} ist. Ferner wurde in dem mit b) gekennzeichneten Term die Definition des Laplace-Operators benutzt. Betrachten wir nun die beiden Summanden a) und b) getrennt:

- mit $\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ ($\vec{\nabla}'$ bezieht sich nun auf \vec{r}' !) und der Produktregel ist

$$\begin{aligned}a) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \int \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \left\{ \int \vec{\nabla}' \left(\vec{j}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3r' - \int \left(\vec{\nabla}' \vec{j}(\vec{r}') \right) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \right\}.\end{aligned}$$

Das zweite Integral verschwindet, da $\vec{\nabla}' \vec{j}(\vec{r}') = \text{div} \vec{j}(\vec{r}') = 0$ in der Magnetostatik (stationäre Ströme (3.2)). Setzt man im ersten Integral

$$\vec{x}(\vec{r}') := \vec{j}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

so ist

$$a) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \int \text{div} \vec{x}(\vec{r}') d^3r' \stackrel{\text{Gauß}}{=} -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \oint_{S(V)} \vec{x}(\vec{r}') \cdot d\vec{f}' = 0$$

(der Integrand \vec{x} verschwindet an den „Grenzen des Universums“).

- Beachtet man im Summanden b)

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

(s.auch Gleichung (1.38)),

so folgt für die Rotation von \vec{B}

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})}. \quad (3.15)$$

Dies ist die zweite Differentialgleichung der Magnetostatik. Zum Vergleich: in der Elektrostatik gilt $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$.

Diese Differenzialgleichung (3.15) läßt sich auch integral darstellen: Integrieren wir dazu die magnetische Induktionsdichte entlang eines geschlossenen Weges, der den Rand einer Fläche F darstellt:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_F \text{rot} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} \stackrel{\text{Glg. 3.15}}{=} \mu_0 \oint_F \vec{j} \cdot d\vec{f}$$

Es gilt also das **Amperesche Durchflutungsgesetz**:

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I} \quad (3.16)$$

wobei I der gesamte Strom ist, der durch die Fläche, über deren Rand integriert wird, fließt. Man sieht also:

- $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} \neq 0$: es gibt geschlossene Feldlinien in der Magnetostatik (im Gegensatz zur Elektrostatik!). Aus der Diskussion der Quellen der magnetischen Induktionsdichte wissen wir ja, daß \vec{B} -Felder keine Anfangs- und Endpunkte besitzen. Das \vec{B} -Feld wird also ausschliesslich durch geschlossene Feldlinien dargestellt.
- Ströme erzeugen um sich herum die geschlossenen Feldlinien des \vec{B} -Feldes. Dabei ist nach dem Ampereschen Durchflutungsgesetz das Linienintegral der magnetischen Induktionsdichte über den Rand einer Fläche proportional zum Gesamtstrom, der durch diese Fläche fließt.

Das Amperesche Durchflutungsgesetz kann benutzt werden um in sehr einfacher Weise die magnetische Induktionsdichte für eine Stromverteilung zu berechnen, die rotationssymmetrisch um die Richtung des Stromes ist. Sei diese Richtung und das Zentrum dieser Stromverteilung gegeben durch die z-Achse unseres Koordinatensystems. Wir betrachten nun einen Kreis um diese z-Achse mit dem Zentrum bei $x = y = 0$, einer Flächennormalen parallel zu z-Achse und einem Radius R (siehe Abb. 2.4). Wegen der Symmetrie des Problems besitzt die magnetische Induktionsdichte auf diesem Kreis nur eine Komponente in Richtung der Tangente an diesem Kreis. Außerdem muß der Betrag dieser Azimutalkomponente von B für alle Punkte auf diesem Kreis gleich sein. Mit dem

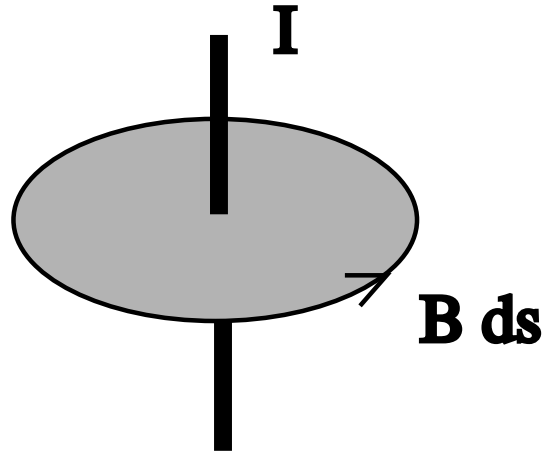


Abbildung 3.13: Zur Berechnung der magnetischen Induktionsdichte bei einer symmetrischen Stromverteilung

Ampereschen Durchflutungsgesetz (3.16) können wir also schreiben

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} &= 2\pi R B \\ &= \mu_0 \int \vec{j}(\vec{r}) d\vec{f} \\ &= \mu_0 I \end{aligned}$$

wobei I den Gesamtstrom durch die Kreisfläche bezeichnet. Aus dieser Gleichung können wir also direkt

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{R} \quad (3.17)$$

bestimmen.

Als zweites Beispiel zur Berechnung von Magnetfeldern betrachten wir eine Spule aus einem stromdurchflossenen Leiter mit spiralförmigen Leiterschleifen. Diese Spirale sei selbst wieder zu einem Ring gebogen. Wenn wir nun einen Schnitt durch diesen Ring geformt aus einer Spirale machen, ergibt sich die schematische Darstellung von Abb. 3.14. Die kleinen Kreise mit dem Kreuz auf dem inneren Ring stehen für den Schnitt durch den stromführenden Leiter, bei denen der Strom in die Zeichenebene fließt, die kleinen Kreise mit dem Punkt im Zentrum repräsentieren die Schnitte durch den Leiter bei denen der Strom aus der Ebene in Richtung auf den Betrachter fließt. Betrachtet man nun einen Integrationsweg, so wie er in der Abbildung skizziert ist und integriert die magnetische Induktionsdichte entlang dieses Weges (in Richtung des Uhrzeigers), so würde eine magnetische Induktion, die parallel zu dieser Integrationsrichtung verläuft den Betrag

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi R B \quad (3.18)$$

wobei R für den Radius des Integrationskreises steht. Der Flächenvektor der mit diesem Integrationsweg durchlaufenen Fläche zeigt in die Darstellungsebene hinein, steht also parallel zu den Strömen im Innern des Rings. Deshalb ergibt auch das Integral über den in Abb. 3.14 dargestellten Weg mit Hilfe des Gauss'schen Satzes den Betrag

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int \vec{j}(\vec{r}) d\vec{f} = \mu_0 n I, \quad (3.19)$$

wobei n hier für die Zahl Durchstoßpunkte im Innern, also der Zahl der Windungen der Spule steht. Aus (3.18) und (3.19) ergibt sich für die magnetische Induktionsdichte im Inneren der Spule

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2\pi R}. \quad (3.20)$$

Betrachten wir nun einen Integrationsweg der kreisförmig um die Spule liegt, so dass auch die äußeren Leiterelemente in der Integrationsfläche liegen, so würde der gesamte elektrische Strom durch diese Fläche gleich Null sein: der Beitrag aus den stromführenden Elementen im Inneren des Ringes wird gerade durch die Beiträge im äußeren Ring, die ja antiparallel zum Flächenvektor in (3.19) stehen, kompensiert. In diesem Fall liefert die Kombination von Gl.(3.18) und (3.19) also den Wert Null für die magnetische Induktionsdichte. Das gleich gilt auch im Inneren der Spule (Integrationsweg innerhalb des inneren stromführenden Ringes).

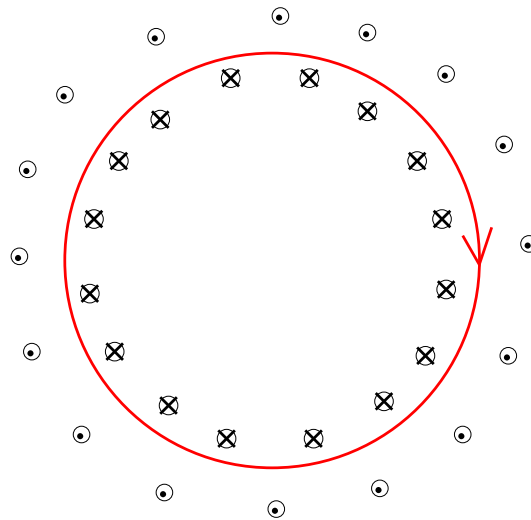


Abbildung 3.14: Zur Berechnung der magnetischen Induktionsdichte bei ringförmigen Spule

Gegenüberstellung der Elektro- und Magnetostatischen Grundgleichungen

	Elektrostatik	Magnetostatik
Quellen	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$
Wirbel	$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$	$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$
Potenzial	$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi$	$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} (= \vec{\nabla} \times \vec{A})$
	$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' } d^3r'$	$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' } dV'$

3.4 Das magnetische Feld einer lokalisierten Stromverteilung

In den vorhergehenden Abschnitten haben wir gesehen, dass die Gleichung für das Vektorfeld der Magnetostatik \vec{A} (siehe Gl. (3.12))

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.21)$$

in der Struktur der Bestimmungsgleichung für das Potenzial $\Phi(\vec{r})$ der Elektrostatik (siehe Abschnitt 1.7)

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

sehr ähnlich ist. Von der mathematischen Struktur her entspricht die Bestimmungsgleichung für jede kartesische Komponente von \vec{A} aus der entsprechenden kartesischen Komponente der Stromdichte \vec{j} der Bestimmungsgleichung für das elektrostatische Potential Φ aus der Ladungsverteilung ρ .

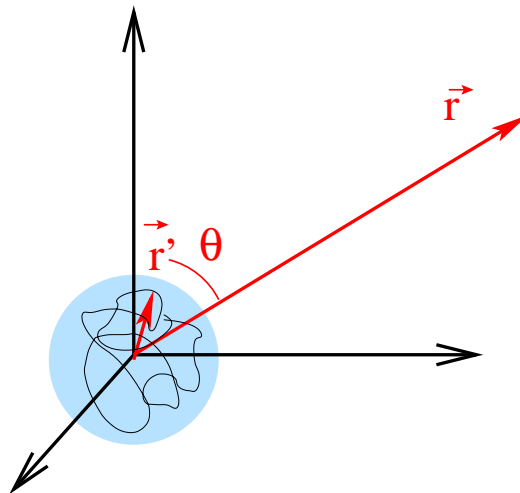


Abbildung 3.15: Beitrag einer lokalisierten Stromverteilung zum Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$.

In diesem Paragraph wollen wir nun das Magnetfeld einer Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r}')$, die nur in der Nähe des Koordinatenursprungs von Null verschieden ist, betrachten. Dabei interessieren wir uns für das daraus resultierende Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ an Positionen \vec{r} , die relativ weit weg vom Koordinatenursprung liegen, so wie es in der Abb. 3.15 dargestellt ist. Dies sollte also weitgehend dem Problem

der lokalen Ladungsverteilung für die Berechnung des elektrischen Potentials entsprechen. Siehe den Abschnitt über die Multipolentwicklung des elektrischen Feldes, das durch eine lokalisierte Ladungsverteilung erzeugt wurde. Diese Situation ist deshalb von großem Interesse, da sie dem Fall eines Atoms entsprechen, in welchem die Elektronen, die um den Atomkern im Koordinatenursprung "herumsausen", für eine Stromverteilung sorgen, die auf einen Bereich mit Ausmaßen von einigen Angstrom lokalisiert ist.

Für die Berechnung der Multipolentwicklung in der Magnetostatik wollen wir uns in Erinnerung rufen, dass nach den Gleichungen (1.40) und (1.41) gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta}} \\ &= \sum_l \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \vartheta) \end{aligned} \quad (3.22)$$

wobei hier $r_{>} = r$ und $r_{<} = r'$.

Die Summe in (3.22) entsteht dabei durch die Entwicklung der Abhängigkeit des Ausdruckes von dem Cosinus des Winkels ϑ zwischen den Vektoren \vec{r} und \vec{r}' nach dem Vollständigen Funktionensystemen der Legendre-Polynome. Wir wollen diese Entwicklung nun in die Gleichung für $\vec{A}(\vec{r})$ (3.21) einsetzen und haben deshalb auch in den Bezeichnungen $r_{<} = r'$, $r_{>} = r$ zum Ausdruck gebracht, dass der Abstand des Beobachtungspunktes \vec{r} vom Koordinatenursprung deutlich größer ist als der Abstand der Punkte \vec{r}' , an denen die erzeugende Stromverteilung von Null verschieden ist. Wir können uns also in der Entwicklung (3.22) auf die Terme mit niedrigem l beschränken. Dadurch ergibt sich also

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r} + \frac{r'}{r^2} \cos(\vartheta) + \frac{r'^2}{r^3} P_2(\cos \vartheta) + \dots \\ \implies A(\vec{r}) &= \frac{\mu_o}{4\pi r} \int \vec{j}(\vec{r}') dr' + \frac{\mu_o}{4\pi r^3} \int \vec{j}(\vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}') d^3r' + \dots \end{aligned} \quad (3.23)$$

mit $P_0 = 1$ und $P_1(x) = x$ und $r' \cos \vartheta = (\vec{r} \cdot \vec{r}')/r$.

Bevor wir diese Entwicklung weiter analysieren, betrachten und beweisen wir die folgende

Behauptung:

Seien f und g zwei von \vec{r} abhängige skalare Funktionen und bezeichne $\vec{j}(\vec{r})$ eine lokalisierte Stromverteilung der Magnetostatik ($\text{div} \vec{j} = 0$), so gilt:

$$\int \left(f(\vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla}' g(\vec{r}') + g(\vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla}' f(\vec{r}') \right) d^3r' \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.24)$$

Beweis:

Zu Beginn dieses Beweises betrachten wir folgenden Zusammenhang

$$\int \vec{\nabla}'(f \vec{j} g) d^3 r' = \int (\vec{\nabla}'(f \vec{j})) g d^3 r' + \int f \vec{j} \vec{\nabla}' g d^3 r',$$

der sich einfach durch Anwenden der Produktregel für den $\vec{\nabla}$ Operator im Integranden ergibt. Diese Beziehung können wir umschreiben in

$$\int f \vec{j} \vec{\nabla}' g d^3 r' = \underbrace{\int \vec{\nabla}'(f \vec{j} g) d^3 r'}_{\text{Term 1}} - \underbrace{\int (\vec{\nabla}'(f \vec{j})) g d^3 r'}_{\text{Term 2}} \quad (3.25)$$

Wir betrachten nun die beiden Terme 1 und 2 einzeln:

Term 1:

$$\int \text{div}(f \vec{j} g) d^3 r \stackrel{\text{Gauß}}{=} \oint_F f \vec{j} g d\vec{F} = 0$$

Das Oberflächenintegral auf der rechten Seite dieser Gleichung ergibt den Wert 0, da ja unsere Stromverteilung lokalisiert ist und der Strom \vec{j} , damit also auch das Produkt $f \vec{j} g$ auf der Oberfläche identisch null ist.

Für den **2. Term** folgt mit der Produktregel

$$\text{Term 2} = \int (\vec{\nabla}' f) \vec{j} g d^3 r' + \int f (\vec{\nabla}' \vec{j}) g d^3 r'$$

Wegen der Forderung nach stationären Strömen in der Magnetostatik ist $\text{div} \vec{j} = 0$ und der 2. Summand in dieser Gleichung verschwindet. Setzen wir nun die Ergebnisse für Term 1 und Term 2 wieder in (3.25) ein, so ergibt sich

$$\int f \vec{j} \vec{\nabla}' g d^3 r' = - \int (\vec{\nabla}' f) \vec{j} g d^3 r'$$

und damit die Behauptung (3.24).

Als Anwendung dieses Ergebnisses der Gleichung (3.24) zwei Beispiele :

1. Sei $f = 1$; $g = x'$ (die x-Komponente des Vektors \vec{r}') $\implies \vec{\nabla}' f = 0$; $\vec{\nabla}' g = \hat{e}_x$, der Einheitsvektor in Richtung der x-Achse.
Einsetzen in (3.24) ergibt

$$\begin{aligned} \int \vec{j}(\vec{r}') \hat{e}_x d^3 r' &= 0 \\ &= \int j_x(\vec{r}') d^3 r'. \end{aligned}$$

Ganz analog verfährt man für die y- und z-Komponente! Also:

$$\int \vec{j}(\vec{r}') dx' dy' dz' = \vec{0} \quad (3.26)$$

Dies bedeutet also, daß das Volumenintegral über eine lokalisierte stationäre Stromverteilung verschwindet. Dies Ergebnis läßt sich auch intuitiv leicht nachvollziehen: Wäre das Integral von Null verschieden, so müßte sich die Stromverteilung ja in Richtung des Ergebnisvektors verlagern. Nach einer gewissen Zeit wäre die Stromverteilung also nicht mehr in der Nähe des Koordinatenursprungs lokalisiert. Dies widerspräche aber der Stationarität der Stromverteilung.

2. Sei $f = x'_i$; $g = x'_l$; wobei x'_i und x'_l beliebige kartesische Komponenten des Vektors \vec{r}' bezeichnen sollen. Mit (3.24) folgt

$$\int (x'_i \underbrace{\vec{j} \hat{e}_l}_{j_l} + x'_l \underbrace{\vec{j} \hat{e}_i}_{j_i}) d^3 r' = 0 \quad (3.27)$$

Damit können wir nun berechnen

$$\int x'_l j'_i d^3 r' \stackrel{\text{Gl. 3.27}}{=} \frac{1}{2} \left\{ \int x'_l j'_i d^3 r' - \int x'_i j_l d^3 r' \right\}$$

Multiplizieren wir nun diese Gleichung mit der kartesischen Komponente a_l eines beliebigen Vektors \vec{a} und summieren wir anschließend über diesen kartesischen Index l , erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sum_l a_l \int x'_l j'_i d^3 r' &= \sum_l \frac{1}{2} a_l \left\{ \int x'_l j'_i d^3 r' - \int x'_i j_l d^3 r' \right\} \\ &\stackrel{!}{=} -\frac{1}{2} \left[\vec{a} \times \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d^3 r' \right]_{i.\text{Komponente}} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Diese letzte Gleichung kann man leicht verifizieren, indem man z.B. die linke Seite für $i = x$ -Komponente berechnet und auch im Vektorprodukt auf der rechten Seite die x -Komponente ausrechnet.

Benennen wir nun noch in (3.28) die Integrationsvariable \vec{r}' um in \vec{r} , so folgt sofort:

$$\int \vec{a} \vec{r} j_x d^3 r = \frac{1}{2} \int \left[\vec{a} \times (\vec{r} \times \vec{j}) \right]_x d^3 r \quad (3.29)$$

Nun zurück zum $\vec{A}(\vec{r})$ in der Entwicklung von (3.23)

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \cdot 0 - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int \vec{r} \vec{r}' j(\vec{r}') d^3 r' + \dots \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{2r^3} \vec{r} \times \int \vec{r}' \times j(\vec{r}') d^3 r' + \dots \end{aligned} \quad (3.30)$$

In der ersten Zeile haben wir ausgenutzt, dass das Volumenintegral über einen lokalisierten stationären Strom verschwindet (3.26), und in der 2. Zeile haben wir (3.29) angewandt. Die Näherung von Gl.(3.30) entspricht der Dipolnäherung für das Vektorpotenzial $\vec{A}(\vec{r})$. Gleichzeitig sehen wir, dass der Monopolbeitrag zum Vektorpotenzial verschwindet (siehe 1. Zeile von (3.30))

Wir definieren das **magnetische Dipolmoment** \vec{m} einer Stromverteilung

$$\vec{m} := \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d^3 r', \quad (3.31)$$

und bezeichnen den Integranden dieser Definition als magnetische Dipoldichte. Aus (3.30) sieht man, dass das Vektorfeld eines magnetischen Dipols, der sich am Koordinatenursprung befindet, gegeben ist durch

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \vec{m} \times \vec{r} \quad (3.32)$$

Zum Vergleich erinnern wir uns noch kurz an die Definition des elektrischen Dipolmomentes einer Ladungsverteilung

$$\vec{d} = \int \vec{r}' \varrho(\vec{r}') d^3 r'$$

und den Beitrag eines Dipols zum elektrostatischen Potenzial Φ

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3}. \quad (3.33)$$

Im nächsten Teil dieses Abschnittes wollen wir nun diese Begriffe und Zusammenhänge durch die Anwendungen in 2 Beispielen vertiefen:

Beispiel 1: Kreisstrom

Ein Kreisstrom für einen Kreis mit dem Radius R in der x - y -Ebene um den Koordinatenursprung ist mathematisch gegeben durch:

$$\vec{j}(\vec{r}') = I \frac{\delta(|\vec{r}'| - R)}{R} \delta(\cos \vartheta) \hat{e}_\varphi \quad (3.34)$$

Diese Darstellung mag zunächst etwas verwunderlich sein, wir wollen sie kurz erläutern:

1. Die Richtung des Stromvektors \vec{j} ist durch den Einheitsvektor \hat{e}_φ der Kugelkoordinaten, also in tangentialer Richtung an den Kreis in der x - y -Ebene (und damit in Richtung des Stromflusses) gegeben.
2. $\delta(|\vec{r}'| - R)\delta(\cos \vartheta)$ begrenzt den Strom auf die Kreisbahn.

Zur Bestätigung des Vorfaktors I/R berechnen wir nun den Gesamtstrom durch die y - z -Fläche:

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\infty} I \frac{\delta(r' - R)}{R} \delta(\cos \vartheta') r' dr' d \cos \vartheta' = I$$

Für den Kreisstrom (3.34) können wir nun mit der Definition (3.31) das magnetische Dipolmoment dieses Kreisstromes berechnen:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int I \frac{\delta(r' - R)}{R} \delta(\cos \vartheta') \hat{e}_{r'} \times \hat{e}_{\varphi'} r' d^3 r'.$$

Damit haben wir sofort die Richtung des magnetischen Momentes: Für die Vektoren \vec{r}' , für die der Integrand nicht verschwindet (also in der x - y -Ebene) steht $\hat{e}_{r'} \times \hat{e}_{\varphi'}$ und damit auch \vec{m} parallel zur z -Achse! Wie sieht der Wert von $|\vec{m}|$ aus?

$$\vec{m} = \frac{1}{2R} \hat{e}_z \int I \delta(r' - R) \delta(\cos \vartheta') r' \underbrace{r'^2 dr' d \cos \vartheta' d\varphi}_{d^3 r' \text{ in Kugelk.}} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2R} \hat{e}_z 2\pi \int_0^{\infty} r'^3 I \delta(r' - R) dr' \\ &= \hat{e}_z \pi R^2 I = \vec{F} I \end{aligned} \quad (3.36)$$

Das Dipolmoment eines Ringstromes ergibt sich also als das Produkt aus dem Strom und der vom Stromkreis umschlossenen Fläche \vec{F} .

Betrachten wir nun den Fall für ganz beliebige Leiterschleifen in der Ebene. In diesem Fall müssen wir über die geschlossene Kurve der Leiterschleife integrieren und das magnetische Moment für den Fall, daß die Leiterschleife von einem Strom I durchflossen wird, ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \frac{1}{2} I \oint_{\tau} \vec{r}' \times d\vec{s} \\ &= I \int_F d\vec{a} = I \vec{F} \end{aligned}$$

Bei dem Übergang zur 2. Zeile dieser Gleichung haben wir ausgenutzt, daß das Vektorprodukt aus \vec{r}' und dem Linienelement $d\vec{s}$ gerade die doppelte Fläche ergibt, die bei Änderung des Integrationsvektors auf dem Rand vom Vektor \vec{r}' überstrichen wird (siehe Abbildung 3.16). Also gilt auch im allgemeinen Fall, daß das magnetische Moment eines Stromes I durch eine Leiterschleife gerade gegeben ist als das Produkt aus Fläche mal Strom.

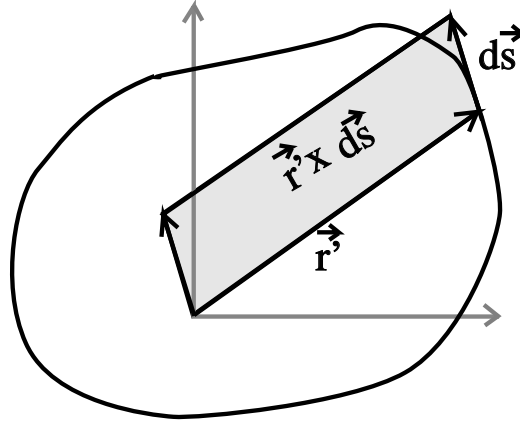


Abbildung 3.16: Zur Berechnung des magnetischen Dipolmomentes einer Stromschleife

Beispiel 2: Strom aus Punktladungen

Betrachten wir nun einen Strom, der durch Punktladungen q_i mit Massen M_i an Positionen \vec{r}_i mit Geschwindigkeiten \vec{v}_i gegeben ist. Die Stromdichte ergibt sich dann zu

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum_i q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Setzt man diese Stromdichte in die Definition des magnetischen Momentes (3.31) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \frac{1}{2} \sum_i q_i \int \vec{r} \times \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) d^3r \\ &= \frac{1}{2} \sum_i q_i \frac{M_i}{M_i} \vec{r}_i \times \vec{v}_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_i q_i \frac{1}{M_i} \vec{l}_i; \end{aligned}$$

wobei $M_i \cdot \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \vec{l}_i$, der Drehimpuls der Punktladung ist!

$$\vec{m} = \sum \frac{q_i \vec{l}_i}{2M_i}$$

In der Atomphysik steht q_i dann für die e^- , die Elementarladung des Elektrons, das den Atomkern umkreist. Besitzt dieses umlaufende Elektron den Drehimpuls \vec{l}_i , so ergibt sich ein Beitrag zum magnetischen Moment des Atoms:

$$\begin{aligned} \vec{m}_{e^-} &= \frac{e^- \vec{l}_i}{2M_{e^-}} \\ |\vec{m}_{e^-}| &= \frac{e^-}{2M_{e^-}} \hbar \sqrt{l(l+1)} := \mu_B * \sqrt{l(l+1)} \end{aligned}$$

$\vec{\mu}_B$ ist das sogenannte Bohrsche Magneton und für den Betrag des Drehimpulses haben wir den quantenmechanischen Wert $\hbar\sqrt{l(l+1)}$ eingesetzt, wobei die Werte l für den Drehimpuls entsprechend den Orbitalen die Werte $0, 1, 2, \dots$ annehmen kann. Das Bohrsche Magneton wird oft in Gaußschen Einheiten angegeben:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2Mc}$$

3.5 Kraft auf magnetische Dipole in einem äusseren Magnetfeld

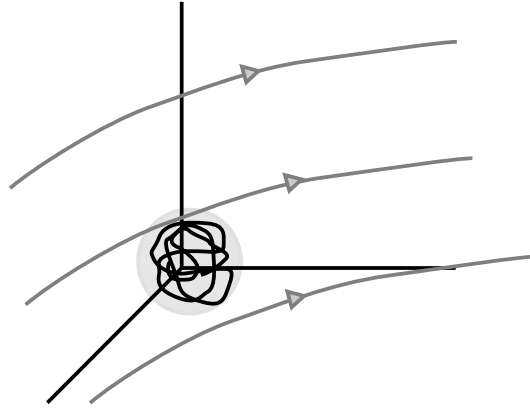


Abbildung 3.17: lokalisierte Stromverteilung im äusseren Magnetfeld

Es soll nun diskutiert werden, was für Kräfte und Drehmomente auf eine lokalisierte Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ in einem äusseren Magnetfeld \vec{B} wirken. Dabei soll die Stromverteilung in einem engen Bereich um den Koordinatenursprung lokalisiert sein und die Ströme, die die magnetische Induktionsdichte \vec{B} erzeugen sollen weit weg sein von der lokalisierten Stromverteilung, auf die die Kraft ausgeübt wird (siehe Abb. 3.17). Demzufolge ändert sich \vec{B} im Bereich der Stromverteilung nur wenig und wir können die magnetische Induktionsdichte für den Bereich, in dem die Stromdichte \vec{j} von Null verschieden ist, in eine Taylorreihe entwickeln. Für die kartesische Komponente B_k (der Index k steht für x , y oder z) der magnetischen Induktionsdichte schreiben wir die Taylorentwicklung:

$$\begin{aligned} B_k(\vec{r}) &= B_k(\vec{0}) + \sum_{l=1}^3 \frac{d}{dx_l} B_k|_{\vec{r}=\vec{0}} x_l + \dots \\ &= \vec{B}(\vec{0}) + \underbrace{(\vec{r} \cdot \vec{\nabla})}_{b)} \vec{B}(\vec{0}) + \dots \end{aligned} \quad (3.37)$$

In der ersten Zeile betrachten wir Ableitungen nach der kartesischen Koordinaten x_l , wobei x_1 für x , x_2 für y und x_3 für z steht. Nach dem ersten Ampereschen Gesetz gilt für die Kraft \vec{F} eines Magnetfeldes auf eine Stromverteilung (3.3):

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int d\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B} = \int \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) d^3r \\ &= \int \left[\vec{j}(\vec{r}) \times \left(\underbrace{\vec{B}(\vec{0})}_{a)} + \underbrace{(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}(\vec{0})}_{b)} + \dots \right) \right] d^3r \end{aligned} \quad (3.38)$$

Dabei haben wir in der 2. Zeile dieser Gleichung die Taylorentwicklung (3.37) für die magnetische Induktionsdichte eingefügt. Betrachte die Terme a) und b)

in (3.38) getrennt:

$$\text{a) } \vec{F}_a = \int \left[\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{0}) \right] d^3r = -\vec{B}(\vec{0}) \times \int \vec{j}(\vec{r}) d^3r = \vec{0}$$

da das Volumenintegral über $\vec{j}(\vec{r})$ für lokale Stromverteilungen verschwindet (siehe (3.26)).

$$\text{b) } \vec{F}_b = \int \left[\vec{j}(\vec{r}) \times \left(\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{B}(\vec{0}) \right] dV$$

läßt sich mit Hilfe der folgenden Nebenrechnungen auswerten:

N.R.(1): Da die Ströme, die das Magnetfeld \vec{B} verursachen weit weg sind vom Koordinatenursprung (siehe Voraussetzung, die wir zu Beginn dieses Abschnittes diskutiert haben), gilt in der Nähe des Koordinatenursprunges $\text{rot}\vec{B} = 0$. Damit ist auch

$$\vec{r} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) = \vec{0}.$$

Mit dem Grassmannschen Entwicklungssatz (s. Glg. 3.14) ist also auch

$$\begin{aligned} \left[\underbrace{\vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{r})}_{\vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{r})} - \left(\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{B} \right] \Big|_{\vec{x}=\vec{0}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{r})}_{\vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{r})} &= \left(\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{B} \end{aligned}$$

Dabei bedeutet die Unterklammerung an, daß sich die Ableitungen im Nabla Operator nur auf die betreffende Größe, also hier \vec{B} bezieht.

Also ist

$$\vec{F}_b = \int \left[\vec{j}(\vec{r}) \times \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{r})}_{\vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{r})} \right] d^3r.$$

Das läßt sich nun mit der folgenden Nebenrechnung weiter vereinfachen:

N.R.(2): Für die x-Komponente von \vec{F}_b gilt

$$\begin{aligned} [\vec{F}_b]_x &= \left[\int \left\{ \vec{j}(\vec{r}) \times \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{r})}_{\vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{r})} \right\} d^3r \right]_x \\ &= \int \left\{ j_y \underbrace{\partial_z(\vec{B} \cdot \vec{r})}_{\partial_z(\vec{B} \cdot \vec{r})} - j_z \underbrace{\partial_y(\vec{B} \cdot \vec{r})}_{\partial_y(\vec{B} \cdot \vec{r})} \right\} d^3r \\ &= - \left[\int \left\{ \underbrace{\partial_y(\vec{B} \cdot \vec{r})}_{\partial_y(\vec{B} \cdot \vec{r})} j_z \right\} d^3r - \int \left\{ \underbrace{\partial_z(\vec{B} \cdot \vec{r})}_{\partial_z(\vec{B} \cdot \vec{r})} j_y \right\} d^3r \right], \end{aligned}$$

wobei ∂_z als Abkürzung für die Ableitung d/dz stehen soll. Die vorstehende Gleichung gilt für die y- und z-Komponente entsprechend.

Mit der Definition des Kreuzprodukts erhält man dann $\vec{F}_b(\vec{r})$ zu

$$\vec{F}_b(\vec{r}) = - \underbrace{\vec{\nabla} \times \int (\vec{B} \cdot \vec{r})}_{\text{}} \vec{j}(\vec{r}) d^3r.$$

Mit der Vektoridentität (3.29)

$$\int (\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{j}(\vec{r}) d^3r = -\frac{1}{2} \vec{a} \times \int (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) d^3r$$

und der Definition des magnetischen Momentes $\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d^3r'$ ist dann schließlich

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{B}}_{\text{}} \times \int (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) d^3r = \vec{\nabla} \times (\vec{B}(\vec{x}) \times \vec{m}) \Big|_{\vec{x}=\vec{0}}$$

$$\boxed{\vec{F} = \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{m})}$$

Mit dem Grassmannschen Entwicklungssatz (s. Glg. 3.14) gilt

$$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{m} = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

(letzteres, da $\text{div} \vec{B}$ verschwindet). Da für stationäre, nahezu konstante \vec{B} -Felder (d.h. keine Wirbel) $\text{rot} \vec{B} = 0$ ($\Rightarrow \partial_i B_l = \partial_l B_i$) gilt und \vec{m} eine Konstante ist, gilt

$$\begin{aligned} (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) B_l &= \sum_{i=1}^3 m_i \partial_i B_l = \sum_{i=1}^3 m_i \partial_l B_i = \left[\vec{\nabla} (\vec{m} \cdot \vec{B}) \right]_l \\ \Rightarrow \vec{F} &= \vec{\nabla} (\vec{m} \cdot \vec{B}). \end{aligned}$$

\vec{F} läßt sich also in der Form

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} U} \quad \text{mit} \quad U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

als negativer Gradient eines Potentials U schreiben. Genau so ist aber ein konservatives Kraftfeld definiert. Seine potenzielle Energie lautet somit

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}. \quad (3.39)$$

Die Energie eines magnetischen Momentes \vec{m} ist also minimal, wenn \vec{m} parallel zur magnetischen Induktionsdichte ausgerichtet ist. Auf diesem Prinzip beruht der klassische Magnetnadelkompass: Das magnetische Moment der Magnetnadel richtet sich parallel zum Magnetfeld aus und minimiert so seine potenzielle Energie.

Im allgemeinen sind \vec{B} und \vec{m} nicht parallel. Auf die Stromverteilung, die durch das magnetische Dipolmoment \vec{m} beschrieben wird, wirkt also ein **Drehmoment** \vec{D} , welches im Folgenden berechnet werden soll: Allgemein gilt

$$\vec{D} = \int \vec{r}' \times d\vec{F}(\vec{r}')$$

wo $d\vec{F}(\vec{r}')$ die Kraft auf ein Volumenelement bei \vec{r}' ist. Mit dem Ampereschen Gesetz (3.3) und dem Grassmannschen Entwicklungssatz (s. Glg. 3.14) ist dann

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \int \vec{r}' \times [\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{B}(\vec{r}')] d^3r' \\ &= \int [\vec{r}' \cdot \vec{B}(\vec{r}')] \vec{j}(\vec{r}') d^3r' - \int [\vec{r}' \vec{j}(\vec{r}')] \vec{B}(\vec{r}') d^3r'. \end{aligned}$$

Betrachte zuerst den zweiten Summanden: Mit der Produktregel gilt

$$\vec{\nabla} (r^2 \vec{j}) = (\vec{\nabla} r^2) \vec{j} + r^2 \vec{\nabla} \vec{j} = 2\vec{r} \cdot \vec{j}$$

(beachte: $\text{div} \vec{j} = 0$ in der Magnetostatik). Betrachtet man die Taylorentwicklung von $\vec{B}(\vec{r}')$ (3.37) nur bis zur ersten Ordnung (also $\vec{B}(\vec{r}') = \vec{B}(\vec{0})$), dann erhält man für den zweiten Summanden mit dem Gaußschen Satz:

$$\begin{aligned} - \int [\vec{r}' \vec{j}(\vec{r}')] \vec{B}(\vec{r}') d^3r' &= -\frac{1}{2} \vec{B}(\vec{0}) \int \vec{\nabla} (r^2 \vec{j}) d^3r' \\ &= -\frac{1}{2} \vec{B}(\vec{0}) \oint r^2 \vec{j}(\vec{r}') d\vec{f}' = 0 \end{aligned}$$

(letzteres, da $\vec{j}(\vec{r}')$ an der „Oberfläche des \mathcal{R}^3 “ verschwindet). Damit gilt für \vec{D} (mit der Vektoridentität 3.29):

$$\vec{D} = \int (\vec{B}(\vec{0}) \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') d^3r' = -\vec{B}(\vec{0}) \times \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d^3r'.$$

Mit der Definition des Magnetischen Moments $\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j} d^3r$ Ist dann also

$$\boxed{\vec{D} = \vec{m} \times \vec{B}(\vec{0})}. \quad (3.40)$$

3.6 Magnetische Kräfte und Drehmoment: Versuche

Barlow-Rad: Das Barlow-Rad ist eine axial gelagerte Scheibe, die sich frei drehen kann. Nahe der Achse wird Strom eingespeist, nahe der äußeren Umrandung wieder entnommen. Parallel zur Drehachse ist ein Magnetfeld B angelegt. Auch die transportierten Ladungen wirkt die Lorentzkraft, so dass die Elektronen in azimuthaler Richtung ausweichen und dabei das Rad "mitnehmen". Das Rad dreht sich.

Drehspulinstrumente: Zwischen den Polen eines Hufeisenmagneten ist eine drehbare Spule angebracht (s. Abb. 3.18). Eine Spiralfeder hält die Spule in der Nulllage, in der die Spulenachse senkrecht zum Feld steht. Wird die Spule bestromt, so versucht das resultierende Drehmoment gegen das Drehmoment der Spiralfeder, die Spule parallel zum Feld zu stellen. Im Gleichgewicht sind beide Drehmomente entgegengesetzt gleich, der Auslenkwinkel und damit der Zeigerausschlag ist proportional zum Stromfluss durch die Spule.

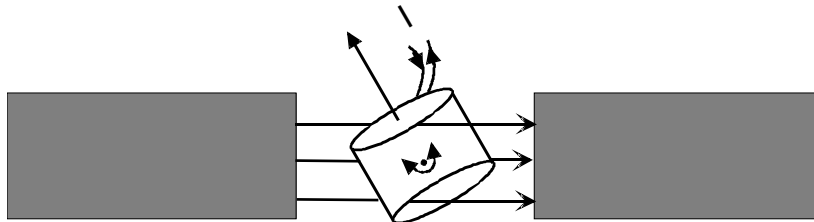


Abbildung 3.18: Prinzip des Drehspulamperemeters

Gleichstrommotor: Würde auf das obige Drehspulinstrument kein rückstellendes Moment wirken, so würde sich die Spulenachse parallel zum B -Feld stellen. Könnte man jetzt den Strom durch die Spule umpolen, so würde sich die Spule um 180° drehen. Genau dies erreicht man durch einen Polwender (s. Abb. 3.19). Hierdurch dreht sich die Spule permanent weiter, sie agiert als Motor.

Erdmagnetfeld und Kompass: Das Erdmagnetfeld entspricht annähernd einem Dipolfeld, wobei allerdings starke lokale Störungen auftreten. Das Dipolfeld wird durch um den äußeren Erdkern fließende Ströme verursacht, die lokalen Störungen z. B. durch magnetisierte (z. B. Fe-haltige) Bodenschichten². Der "Nordpol" einer Kompassnadel richtet sich in etwa³ zum geographischen Nordpol hin aus, der damit physikalisch gesehen einen Südpol darstellt. Der magnetische

² Bereits ab 20–30 km Tiefe wird der Erdmantel aber so heiß, dass Fe unmagnetisch wird.

³ Durch die lokalen Störfelder weist die Magnetnadel in Europa zufällig relativ genau nach Norden.

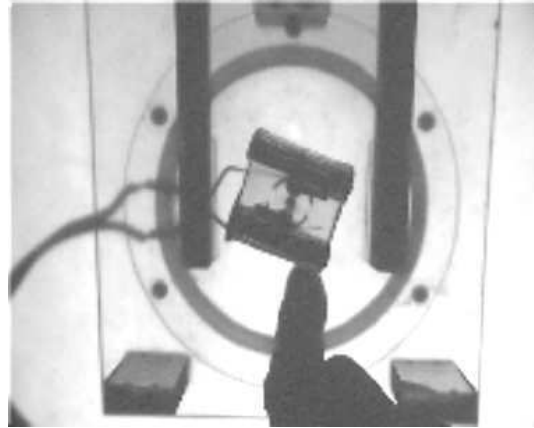
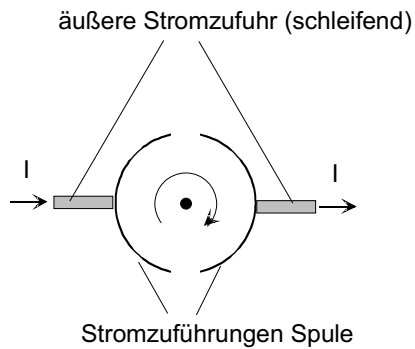


Abbildung 3.19: Umpolen des Spulenstroms beim Gleichstrommotor

Pol liegt etwas abseits des geographischen Pols (in Nordwestgrönland bzw. im Adelie-Land in der Antarktis).

Am magnetischen Pol treten die Feldlinien senkrecht aus dem Erdboden aus ("Inklinationswinkel" zur Horizontalen: 90°), am Äquator parallel. Am Pol beträgt⁴ $B \approx 0.62 \text{ G}$, am Äquator die Hälfte dieses Wertes. Bei einem Breitengrad von 48° treten die Feldlinien unter einem Inklinationswinkel von ca. 65° aus; der Betrag des Feldes ist ca. 0.5 G .

Wir demonstrieren den Inklinationswinkel durch die "Busole", einer in der Vertikalen beweglichen Magnetnadel. Den Betrag des Erdfeldes im Hörsaal ermitteln wir mittels verschiedener Magnetfeldsonden (einer Hallsonde, sowie einer "Förstersonde", engl. "flux-gate"⁵).

⁴ 1 Gauss [G] = 10^{-4} Tesla [T].

⁵ Das flux-gate nutzt die Feldabhängigkeit der Magnetisierung eines ferromagnetischen Materials zur Feldmessung im Bereich μT bis einige 10 mT

3.7 Das magnetische Feld in Materie

Wie wir in den vorangegangenen Kapiteln bereits gesehen haben, wird die magnetische Induktionsdichte \vec{B} durch ein Vektorpotenzial \vec{A} charakterisiert, das aus der Stromverteilung berechnet werden kann nach:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'.$$

In dieser Bestimmungsgleichung gehen wir davon aus, dass die Stromverteilung \vec{j} vollständig bekannt ist. Bei der Untersuchung der magnetischen Phänomene in Materie werden wir aber normalerweise die mikroskopischen Ströme, das sind die Ströme auf atomarem Niveau durch die Bewegung der Elektronen um die Atomkerne, nicht explizit kennen. Deshalb erhalten wir zu dem Vektorpotenzial, das von den makroskopischen Strömen generiert wird, einen Beitrag durch diese mikroskopischen Ströme. Dadurch ergibt sich ein Vektorpotenzial der Form

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' + \vec{A}_{mikro}.$$

Der Anteil der atomaren Ströme, das “mikroskopische” Potential \vec{A}_{mikro} ergibt sich als Summe der Beiträge der einzelnen Moleküle oder Atome

$$\begin{aligned} \vec{A}_{mikro} &= \sum_{\text{Molekül } i} \vec{A}_i \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{\vec{m}_i \times (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}, \end{aligned}$$

wobei \vec{m}_i das magnetische Moment des Moleküls i und \vec{r}_i dessen Position bezeichnet, so dass sich nach Gl. (3.32) der obige Ausdruck ergibt. Da der Abstand zwischen dem Beobachtungspunkt \vec{r} und der Position \vec{r}_i im Allgemeinen im Vergleich zu den atomaren Abmessungen, auf die die Ströme eines Moleküls lokalisiert sind, sehr groß sein wird, reicht es aus, dass wir bei der Multipolentwicklung dieser mikroskopischen Strombeiträge nur den Dipolanteil berücksichtigen. Die magnetischen Multipolmomente höherer Ordnung können vernachlässigt werden. Ersetzt man diese Summe über die vielen Moleküle durch ein Integral über die magnetische Dipoldichte $\vec{M}(\vec{r}')$, die also das lokal gemittelte magnetische Moment der Atome pro Volumeneinheit darstellt, so erhält man insgesamt für das Vektorpotenzial

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Beim Übergang zur zweiten Zeile haben wir ausgenutzt, dass mit dem Gradientenoperator $\vec{\nabla}'$ der auf die Koordinaten des Vektors \vec{r}' wirkt

$$\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

gilt, eine Beziehung, die man leicht durch explizites Nachrechnen überprüfen kann. Hier und im folgenden bezeichnen wir mit \vec{M} die magnetische Dipoldichte bzw. *Magnetisierung*.

Zur Vereinfachung dieses Ausdrucks führen wir eine Nebenrechnung durch und zeigen zunächst einmal:

$$\int \vec{\nabla}' \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' = 0. \quad (3.42)$$

Zum Beweis dieser Vektorgleichung betrachten wir die x -Komponente:

$$\begin{aligned} \left[\int \vec{\nabla}' \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' \right]_x &= \int \frac{\partial}{\partial y'} \frac{M_z}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx' dy' dz' - \int \frac{\partial}{\partial z'} \frac{M_y}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx' dy' dz' \\ &= \int \frac{M_z}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Big|_{y'=-\infty}^{+\infty} dx' dz' - \int \frac{M_y}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Big|_{z'=-\infty}^{+\infty} dx' dy' \\ &= 0 \quad \text{da } \frac{M}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \text{ für } \vec{r}' \rightarrow \infty \text{ verschwindet.} \end{aligned}$$

Wenden wir nun die Produktregel für den $\vec{\nabla}'$ Operator in (3.42) so erhalten wir

$$0 = \int (\vec{\nabla}' \times \vec{M}) \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' + \int \left(\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{M} d^3\vec{r}'$$

Somit läßt sich der Potenzialanteil, der in (3.41) aus den mikroskopischen Strömen resultiert, darstellen als:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{M}(\vec{r}') \times \left(\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3\vec{r}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int (\vec{\nabla}' \times \vec{M}) \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'.$$

Das Gesamtpotenzial \vec{A} in (3.41) erhält so die Form

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') + \text{rot } \vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'} \quad (3.43)$$

Die mikroskopischen Ströme werden also durch $\vec{j}_{\text{mikro}} = \text{rot } \vec{M}$ dargestellt.

Wir können also nun die Wirbel der magnetischen Induktionsdichte \vec{B} ausrechnen mit Hilfe von Gl. (3.15) wenn wir für den Strom die gesamte Stromdichte

$$\vec{j}_{\text{gesamt}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{mikro}} = \vec{j} + \text{rot } \vec{M}$$

einsetzen:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \text{rot } \vec{M})$$

Stellt man diese Gleichung um, so erhält man

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{j} =: \text{rot } \vec{H}. \quad (3.44)$$

Durch diese Gleichung haben wir also eine **magnetische Feldstärke** $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$ definiert, so dass die Wirbel dieser magnetischen Feldstärke, $\text{rot } \vec{H}$ ausschliesslich durch die makroskopische Stromdichte \vec{j} gegeben ist. Im Vakuum gilt $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, da ohne Materie keine Magnetisierung existiert: $\vec{M} = 0$. Es zeigt sich, dass bei den meisten Materialien, die magnetische Dipoldichte \vec{M} proportional zur magnetischen Feldstärke ist: $\vec{M} = \chi_M \cdot \vec{H}$. Der Proportionalitätsfaktor χ_M (Chi) wird als magnetische Suszeptibilität bezeichnet und ist eine Materialkonstante. Damit ergibt sich:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \underbrace{(1 + \chi_M)}_{=: \mu} \vec{H}. \quad (3.45)$$

Zur Vereinfachung wird der Proportionalitätsfaktor zwischen \vec{B} und $\mu_0 \vec{H}$ als *Permeabilität* μ bezeichnet.

3.7.1 Das Verhalten von \vec{B} und \vec{H} an Grenzflächen

Wie bereits in der Elektrostatik, so wollen wir auch in diesem Abschnitt das Verhalten der Felder an Grenzflächen zwischen 2 Medien diskutieren. Wir betrachten also das Verhalten von Magnetfeldern bei dem Übergang von einem Medium I, charakterisiert durch die Permeabilität μ_1 , zu einem Medium II mit μ_2 . Wir werden dazu jetzt zeigen, dass

1. Bei einem Übergang von einem Material zu einem anderen ändert sich die Komponente der magnetischen Induktionsdichte \vec{B} , die senkrecht zur Grenzfläche steht (also parallel zur Flächennormalen \hat{n}), nicht.
2. Fließt in der Grenzfläche kein elektrischer Strom, so bleibt bei einem solchen Übergang auch die Tangentialkomponente des Magnetfeldes \vec{H} , also die Komponente parallel zur Grenzfläche, erhalten

Zum Beweis der Behauptung 1 betrachten wir ein Volumen auf der Grenzfläche zwischen den 2 Medien, das einer flachen Schachtel gleicht, bei der alle Grenzflächen klein sind mit Ausnahme der beiden Flächen parallel zur Grenzfläche, die die Größe ΔF haben sollen. Da die magnetische Induktionsdichte quellfrei ist (siehe Gl. (3.13))

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

ergibt natürlich auch das Integral von $\operatorname{div} \vec{B}$ integriert über das Volumen V dieser Schachtel den Wert 0. Durch Anwendung des Gaußschen Satzes erhalten wir also

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV \\ &\stackrel{\text{Gauß}}{=} \oint_O \vec{B} d\vec{f} \\ &= (\vec{B}_{II} \cdot \vec{n} - \vec{B}_I \cdot \vec{n}) \Delta F \end{aligned}$$

Bei dem Übergang zur letzten Zeile haben wir ausgenutzt, dass nur die beiden Randflächen der Schachtel parallel zur Grenzfläche zum Integral über die Oberfläche beitragen. Diese Flächen die Größe ΔF besitzen und der Vektor des Oberflächenelementes jeweils nach außen zeigt, also im Fall der Grenzfläche im Medium II parallel zur Flächennormale \hat{n} , im Fall der Grenzfläche im Medium I antiparallel zu \hat{n} . Die Seitenflächen liefern im Grenzfall der Ausdehnung der Schachtel gegen null wegen der Stetigkeit von H im Medium I und Medium II wegen der entgegengesetzten Richtung der Flächennormalen keinen Beitrag. Das Argument, das man häufig in Büchern findet, dass die Beiträge der Seitenflächen im Grenzfall verschwinden, ist nicht korrekt. Das gleiche Argument könnte man fälschlich auch auf ΔF anwenden. Daraus ergibt sich also das behauptete Grenzverhalten für die magnetische Induktionsdichte

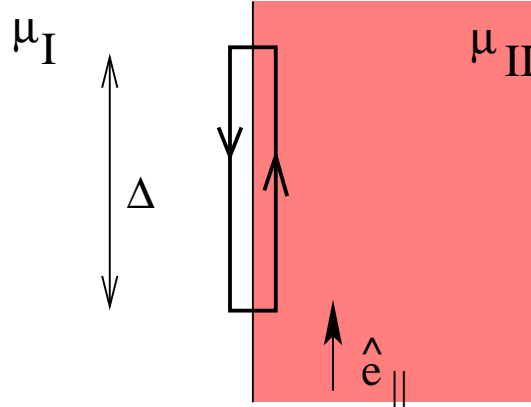
$$\vec{B}_{II} \cdot \vec{n} = \vec{B}_I \cdot \vec{n} \quad (3.46)$$

Zum Beweis der oben aufgeführten Behauptung 2 über das Grenzverhalten starten wir von der Grundgleichung der Magnetostatik im Medium (3.44)

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}$$

Nach unserer Voraussetzung soll die Stromdichte \vec{j} an der Grenzfläche verschwinden, so dass ein Integral von $\operatorname{rot} \vec{H}$ über eine Fläche der Form in Figur 3.20 ebenfalls den Wert 0 ergeben muss

$$\begin{aligned} 0 &= \int_F (\operatorname{rot} \vec{H}) \cdot d\vec{f} \\ &\stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} \\ &= (\vec{H}_{II} - \vec{H}_I) \cdot \hat{e}_{\parallel} \Delta \end{aligned}$$

Abbildung 3.20: Zur Berechnung des Verhaltens von \vec{H} an einer Grenzfläche

Bei dem Übergang von der ersten zur zweiten Zeile haben wir den Stokeschen Integralsatz angewandt. Der Übergang zur dritten Zeile ergibt sich aus der Geometrie des betrachteten Rechtecks: Die Seiten senkrecht zur Grenzfläche tragen wegen der Stetigkeit im Grenzfall nicht bei, die Seiten parallel haben jeweils die Länge Δ und werden bei der Integration parallel (im Medium II) beziehungsweise antiparallel (im Medium I) zum Einheitsvektor \hat{e}_{\parallel} , der parallel zur Grenzfläche orientiert ist, durchlaufen. Damit ergibt sich also auch die 2. Behauptung für das Verhalten an Grenzflächen:

$$\vec{H}_{II} \cdot \hat{e}_{\parallel} = \vec{H}_I \cdot \hat{e}_{\parallel} \quad (3.47)$$

beziehungsweise für die magnetische Induktionsdichte

$$\frac{1}{\mu_0 \mu_{II}} \vec{B}_{II} \cdot \hat{e}_{\parallel} = \frac{1}{\mu_0 \mu_I} \vec{B}_I \cdot \hat{e}_{\parallel}.$$

Um dieses Ergebnis zu verdeutlichen betrachten wir das Verhalten eines Magnetfeldes \vec{H} an einer solchen Grenzfläche zwischen zwei Medien mit Permeabilität μ_I bzw. μ_{II} . Wie in der Abb. 3.21 dargestellt zerlegen wir dazu den Vektor des Magnetfeldes im Bereich des Mediums I, H_I in seine Komponenten parallel und senkrecht zur Grenzfläche. Wegen (3.47) ändert sich die Komponente parallel zur Grenzfläche bei dem Übergang $I \rightarrow II$ nicht. Für die Komponente von \vec{H} , die senkrecht zur Grenzfläche steht, gilt wegen (3.46)

$$\mu_0 \mu_I H_I = \mu_0 \mu_{II} H_{II} \quad \text{bzw.} \quad H_{II} = \frac{\mu_I}{\mu_{II}} H_I.$$

Damit steht der Vektor \vec{H}_{II} im Allgemeinen nicht mehr parallel zu \vec{H}_I . Entsprechendes gilt für die magnetische Induktionsdichte \vec{B} .

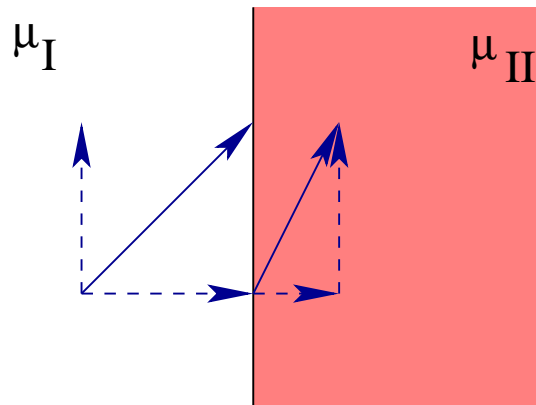


Abbildung 3.21: Verhalten von \vec{H} an einer Grenzfläche, $\mu_{II} = 2\mu_I$

3.8 Magnetische Dipole in der Natur

Wir führen in diesem Kapitel einige Eigenschaften magnetischer Dipole in Analogie zu den in Abschnitt 1.10 behandelten elektrischen Dipolen ein. Magnetische Dipole verhalten sich in vielerlei Hinsicht sehr ähnlich zu elektrischen Dipolen, wie wir im Folgenden sehen werden.

3.8.1 Einige Grundbegriffe

Das magnetische Dipolmoment ist nach Gleichung (3.31), Abschnitt 3.4 als

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d^3 r' \quad (3.48a)$$

definiert und ergab sich für eine Leiterschleife zu $\vec{m} = I\vec{F}$. Hierbei ist \vec{F} die vom Strom umschlossene Fläche. Die Einheit von m ist Am^2 . Für Stabmagnete wird manchmal das magnetische Moment auch über die "Polstärke" P definiert, die an die Stelle der elektrischen Ladung beim elektrischen Dipol tritt:

$$\vec{m} = P \cdot \vec{r}. \quad (3.48b)$$

Hierbei ist \vec{r} der Verbindungsvektor vom "Südpol" zum "Nordpol".

Man definiert die Magnetisierung als:

$$\vec{M} = \frac{1}{\text{Vol.}} \sum_{i=1}^N \vec{m}_i \quad (3.49)$$

Die Magnetisierung hat die Einheit A/m.

Bei vielen Materialien ist die Magnetisierung proportional zum angelegten Feldstärke \vec{H} (dies gilt für nicht allzu große Felder). Man definiert die magnetische Suszeptibilität durch:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (3.50)$$

Die magnetische Suszeptibilität ist wie die elektrische Suszeptibilität dimensionslos. Da \vec{M} proportional zur Dipoldichte und damit zur Teilchendichte ist, wird χ_m oft auf ein Mol Teilchen bezogen und dann als molare Suszeptibilität bezeichnet (Einheit: mol^{-1}). Teilweise wird χ_m auch auf die Masse einer Probe bezogen, man erhält die Massensuszeptibilität (Einheit: kg^{-1}). Weiter sei angemerkt, dass wie im elektrischen Fall \vec{E} und \vec{D} nicht notwendig parallel zueinander sind. Falls dies nicht der Fall ist, wird χ_m zu einem Tensor.

3.8.2 Induzierte Dipole, Diamagnetismus

Ähnlich wie im elektrischen Fall gibt es eine Reihe von Substanzen, deren Bausteine bei Abwesenheit äußerer Magnetfelder völlig unmagnetisch sind. Bringt man diese Materialien in ein magnetisches Feld, so wird eine Magnetisierung erzeugt, die dem angelegten Feld entgegengerichtet ist. Die magnetische Suszeptibilität dieser "diamagnetischen Materialien" ist also negativ. Wir demonstrieren den Diamagnetismus am Beispiel einer Wismut (Bi)-Probe, sowie einer Kohlenstoff-Probe. Die Proben werden entgegen dem Feldgradienten vom Permanentmagneten abgestoßen. Der Effekt, der weitgehend temperaturunabhängig ist, ist allerdings recht schwach.

Einige Werte für cm diamagnetischer Substanzen sind in Tab. 3.1 aufgelistet:

Material	χ_m
Bi	$1.4 \cdot 10^{-5}$
H ₂ O	$-0.72 \cdot 10^{-6}$
N ₂ (Normalbedingungen)	$-3 \cdot 10^{-10}$

Tabelle 3.1: Magnetische Suszeptibilität diamagnetischer Substanzen

Zur genaueren Erklärung des Diamagnetismus müssen wir auf das nächste Kapitel (Induktionsvorgänge) verweisen.

Einen Extremfall des Diamagnetismus findet man bei Supraleitern. Hier kann $\chi_m = -1$ werden, was bedeutet, dass die Flussdichte in diesen Proben verschwindet. Man spricht vom "Idealen Diamagnetismus" oder vom "Meißner-Zustand".

Man unterscheidet zwei Typen von Supraleitern. Das Innere von Typ-I-Supraleitern ist für Felder unterhalb eines "kritischen Magnetfelds" B_c bis auf eine wenige nm dicke Außenschicht vollständig feldfrei. Für $B > B_c$ verschwindet der supraleitende Zustand, die Probe wird normalleitend. B_c ist temperaturabhängig und geht bei der Übergangstemperatur T_c gegen Null. Einige Beispiele sind in Tab. 3.2 aufgelistet.

Material	T_c [K]	$B_c(0)$ [G]
Hg	4.2	400
Pb	7.2	800
Bb	9.2	2000

Tabelle 3.2: Kritische Temperatur und kritisches Magnetfeld bei $T = 0$ für einige Typ-I Supraleiter

Auch bei Typ-II-Supraleitern ist für Felder unterhalb eines "unteren kritischen Feldes" B_{c1} der ideale Diamagnetismus realisiert. Für $B_{c1} < B < B_{c2}$

(B_{c2} : "oberes kritisches Feld") ist die magnetische Flussdichte im Supraleiter verschieden von Null. In dieser "Shubnikov-Phase" durchdringt das Magnetfeld den Supraleiter in Form von Bündeln von Feldlinien. Der Durchmesser der Bündel beträgt wenige nm. Der magnetische Fluss $\phi = \int \vec{B} d\vec{f}$ jedes Bündels hat den Wert $\Phi_0 = h/2e \approx 2.07 \cdot 10^{-15} \text{ Tm}^2$, man spricht deshalb von "Flussquanten". Für $B > B_{c2}$ verschwindet schließlich die Supraleitung.

In Tab. 3.3 sind einige Zahlenwerte aufgelistet.

Material	T_c [K]	B_{c1} [G]	B_{c2} [T]
Nb ₃ Sn	18	750	24
YBa ₂ Cu ₃ O ₇	90	100	bis 100*
MgB ₂	40	250-500	bis 20*

*Abhängig von der Orientierung der Kristallstruktur

Tabelle 3.3: Kritische Temperatur und kritisches Magnetfeld bei $T = 0$ für einige Typ-I Supraleiter

3.8.3 Permanente Dipole; Paramagnetismus

Wenn wir Mangannitrat (MnNO₃) in einen Feldgradienten bringen, so finden wir, dass das Material vom Magneten angezogen wird. Die magnetische Suszeptibilität ist positiv.

MnNO₃ wie auch viele andere Materialien haben ein permanentes magnetisches Dipolmoment. Ohne äußeres Feld sind die Dipole ungeordnet; sie werden im äußeren Feld ganz in Analogie zum elektrischen Fall im Wechselspiel mit der thermischen Bewegung teilweise ausgerichtet.

Analog zum elektrischen Fall findet man für die Suszeptibilität dieser "paramagnetischen Materialien":

$$\chi_m \approx \frac{1}{3} \mu_0 n \frac{m^2}{k_B T} = \frac{\text{const.}}{T} \quad (\text{"Curie-Gesetz"}) \quad (3.51)$$

Hierbei ist n die Dichte der magnetischen Dipole.

(Zum Vergleich: die elektrische Suszeptibilität paraelektrischer Materialien war: $\chi_e \approx 1/(3\epsilon_0) \cdot n \cdot d^2/(k_B T)$).

Die magnetischen Suszeptibilitäten einiger paramagnetischer Materialien sind in Tab. 3.4 angegeben. Typischerweise liegt χ_m im Bereich $10^{-4} \dots 10^{-7}$

Material	χ_m
Pt (300 K)	$1.9 \cdot 10^{-5}$
O ₂ , flüssig	$3.6 \cdot 10^{-4}$
O ₂ , Normalbed.	$1.4 \cdot 10^{-7}$

Tabelle 3.4: Magnetischen Suszeptibilitäten einiger paramagnetischer Materialien bei Zimmertemperatur

3.8.4 Ferromagnetismus

In Materialien wie Fe, Co oder Ni ordnen sich die (permanenten) magnetischen Momente unterhalb der "Curie-Temperatur" T_c über gewisse Abstände parallel zueinander aus. Für Temperaturen oberhalb T_c gilt:

$$\chi_m = \frac{\text{const}}{T - T_c} \quad (\text{"Curie-Weiß-Gesetz"}) \quad (3.52)$$

Auch dieses Verhalten ist analog zum ferroelektrischen Fall.

Kühlt man eine ferromagnetische Probe ohne angelegtes Feld durch T_c , so entstehen in der Probe ferromagnetische Domänen (auch: "Weißsche Bezirke"), deren Magnetisierung in unterschiedliche Richtungen zeigt. Die Gesamtmagnetisierung ist Null. Bei anlegen eines Feldes wachsen die Domänen, deren Magnetisierung in Feldrichtung zeigt. Z. T. ändert sich die Magnetisierung ruckartig ("Umklappen" Weißscher Bezirke). Diese sprunghafte Änderung von \vec{M} kann elektronisch abgegriffen werden und über einen Lautsprecher regelrecht hörbar gemacht werden ("Barkhausen-Effekt"; man hört ein prasselndes Geräusch). Die Abb. 3.22 zeigt die Domänenstruktur am Beispiel eines Nickelplättchens. Die Domänen (genauer: Domänengrenzen = "Bloch-Wände") wurden durch Bestreuen ("Dekoration") mit magnetischem Pulver sichtbar gemacht. Die ebenfalls eingezeichnete Ausrichtung der Domänen wurde durch ihr Wachstumsverhalten bei Anlegen eines Magnetfeldes bestimmt.

Wir können die Ausbildung bzw. das Wachstumsverhalten von Domänenstrukturen ebenfalls an Hand eines Modells nachvollziehen⁶. Das Modell besteht aus sehr vielen, in einer Ebene drehbar angeordneter Stabmagnete (Kompassnadeln). Für $H = 0$ liegen sehr verschieden orientierte Domänen vor; bei Anlegen eines Feldes wachsen die "günstig" orientierten Domänen

Trägt man für einen Ferromagneten die Magnetisierung gegen das angelegte H-Feld auf, so erhält man eine Hysteresekurve wie in Abb. 3.23 dargestellt.

⁶ Es sei hier allerdings angemerkt, dass die Wechselwirkung, die zur ferromagnetischen Ordnung führt, nicht die magnetische Wechselwirkung zwischen Dipolen ist. Statt dessen liegt die "Austauschwechselwirkung" vor, die erst im Rahmen der Quantenmechanik genauer erklärt werden kann. In Kürze sei gesagt, dass bei der Austauschwechselwirkung die Coulombkraft zusammen mit den Welleneigenschaften der Teilchen betrachtet werden muss.

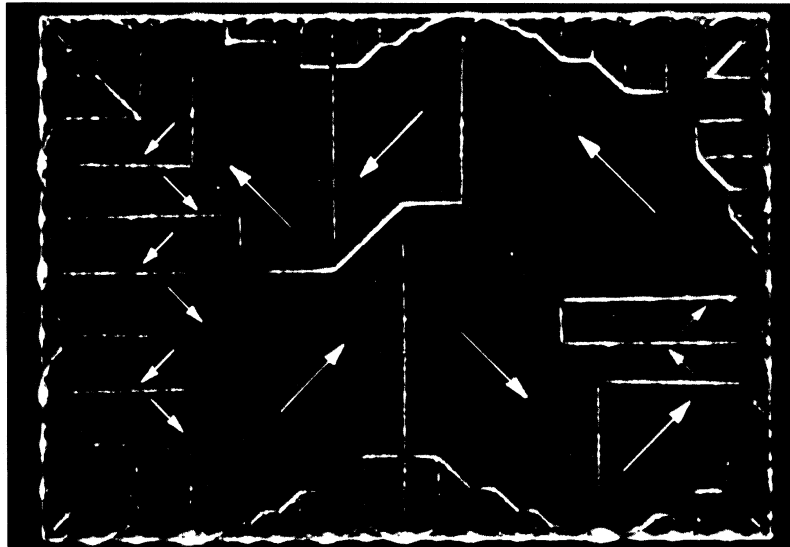


Abbildung 3.22: Ferromagnetische Domänen auf der Oberfläche eines einkristallinen Nickelplättchens. Abbildung durch Pulverdekoration (aus: Ch. Kittel, Festkörperphysik, 12. Auflage, Abb. 15.27)

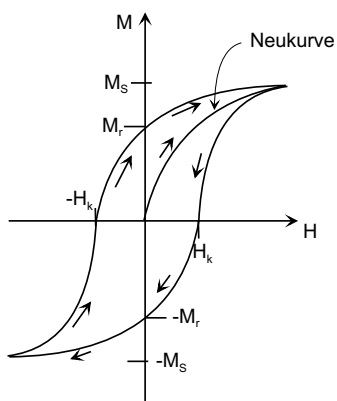


Abbildung 3.23: Schematische Darstellung der Hystereseschleife eines Ferromagneten. M_s : Sättigungsmagnetisierung; M_r : Remanente Magnetisierung; H_k : Koerzitivfeldstärke

Im Experiment beobachten wir die Hystereseschleife (ohne Neukurve) für Ni-Fe

Typische Sättigungsmagnetisierungen $\mu_0 M$ betragen:

Fe: 1700 G

Co: 1400 G

Ni: 487 G

Für spezielle Legierungen wie NdFeB werden für die remanente Magnetisierung $\mu_0 M_r$ sogar Werte um 1 T erreicht. Aus diesem Material werden die heute stärksten Permanentmagnete hergestellt.

Umgekehrt versucht man bei "weichmagnetischen Materialien" die remanente Magnetisierung so klein wie möglich zu halten. Im Idealfall ist M_r fast null und man hat einen (nahezu) eindeutigen Zusammenhang $M(H)$, mit $M \approx \chi_m H$ für kleine Felder. Für spezielle Materialien ("Mumetall") erreicht man für χ_m Werte von einigen 10^4 .

Diese weichmagnetischen Materialien verhalten sich ähnlich wie Paramagnete, allerdings mit einer viel größeren Suszeptibilität.

Mit weichmagnetischen Materialien werden beispielsweise magnetische Abschirmungen hergestellt. Das B -Feld im Inneren der Probe wird gegenüber dem angelegten Feld erheblich verstärkt. Im Außenraum sind die durch die Magnetisierung erzeugten Feldlinien dem angelegten Feld entgegengerichtet, dieses wird abgeschwächt⁷. Legt man an einen Ring aus weichmagnetischen Material mit hoher Suszeptibilität ein Magnetfeld an, so verlaufen die Feldlinien praktisch vollständig im Innern des Zylinders; dessen Innenraum ist nahezu feldfrei. Wir demonstrieren dies durch Dekoration mit Eisenfeilspänen (s. Abb. 3.8.5)

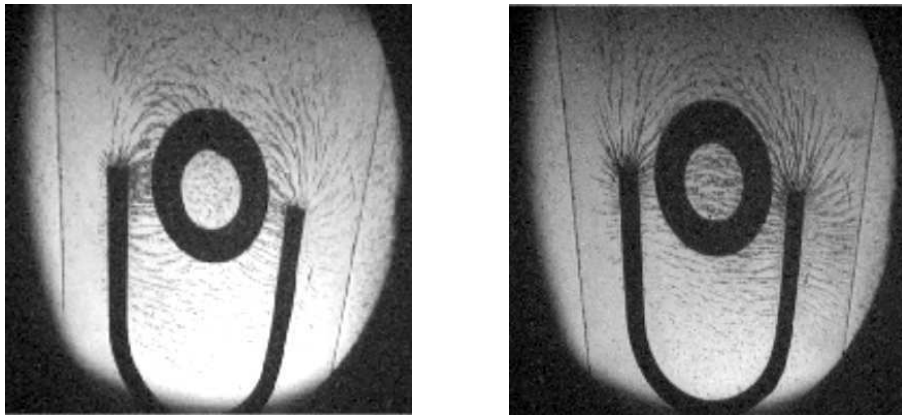


Abbildung 3.24: Weicheisenring (links) und unmagnetischer Messingring (rechts) im Feld eines Hufeisenmagneten. Das Innere des Weicheisenrings ist nahezu feldfrei, während die Feldlinien den Messingring ungehindert durchdringen.

In typischen Laborexperimenten verwendet man ineinandergeschachtelte Zylinder etwa aus Mumetall. Man erreicht damit eine Abschwächung des Erdfeldes um 5-6 Größenordnungen. Für spezielle klinische Anwendungen (z. B. Hirnmagnetismus; Größenordnung der Signale: unter 10^{-12} – 10^{-15} T) werden sogar ganze Räume mit Vielfachschichten aus weichmagnetischem Material und zusätzlich elektrisch gut leitendem Material für die elektrische Abschirmung ausgekleidet ("magnetische Abschirmkammern").

⁷ Für eine unendlich große Platte springt B_{\parallel} um einen Faktor μ_a/μ_i , wie in Abschnitt 3.7 gezeigt.

3.8.5 Weitere Anmerkungen

Es gibt eine ganze Reihe weiterer Effekte, die völlig analog zum elektrischen Fall sind. Wir geben einige Beispiele an:

Spontane Ordnungen

Neben Ferromagnetismus sind insbesondere Antiferromagnetismus und Ferrimagnetismus häufig vorkommende Ordnungstypen. Beim Antiferromagnetismus stehen benachbarte magnetische Momente antiparallel. Für die Suszeptibilität knapp oberhalb der Übergangstemperatur (Néel-Temperatur T_N) gilt:

$$\chi_m = \frac{\text{const.}}{t + T_N}. \quad (3.53)$$

Beispiele für antiferromagnetische Substanzen sind in Tab. 3.5 angegeben.

Material	T_N [K]
MnO	116
FeO	198
NiO	525
Cr	308

Tabelle 3.5: Übergangstemperaturen antiferromagnetischer Materialien

Beim Ferrimagnetismus sind benachbarte magnetische Momente ebenfalls antiparallel angeordnet. Allerdings sind die Magnetisierungen der "nach oben" bzw. "nach unten" zeigenden Untergitter verschieden, so dass netto eine endliche makroskopische Magnetisierung vorliegt. Antiferromagnetische Materialien (Bsp: Ferrit = Fe_2O_3 oder Magnetit = Fe_3O_4) weisen eine qualitativ ähnliche Hysteresekurve auf wie Ferromagnete, allerdings mit einer sehr kleinen Hystereseschleife. Ferrit ist außerdem im Gegensatz zu Fe, Co und Ni nichtleitend. Ferrit wird auf Grund dieser Eigenschaften oft zum Bau von Transformatoren verwendet, wie wir in Kap. 5 genauer sehen werden.

Magnetisierung elliptischer Proben; Entmagnetisierungsfaktoren

Wenn an ein Ellipsoid ein homogenes Magnetfeld angelegt wird, so ist analog zum elektrischen Fall die Magnetisierung in der Probe homogen. Das Feld sei entlang einer Hauptachse x angelegt. Es gilt dann:

$$H_x^{\text{innen}} = H_x^{\text{ausßen}} - N_x M_x \quad (3.54)$$

wobei N_x der "Entmagnetisierungsfaktor" bzgl. der Hauptachse x ist. Er hat den gleichen Zahlenwert wie der in Abschnitt 1.10 diskutierte Entelektrisierungsfaktor.

Ganz analog zum elektrischen Fall (Gl. 1.64, Abschnitt 1.10) erhält man:

$$M = \frac{\chi}{1 + N\chi} H \quad (3.55)$$

Steighöhenmethode zur Bestimmung von χ_m

Wie im elektrischen Fall wird eine paramagnetische Flüssigkeit in das Innere einer Spule gezogen (vgl. Abb. 3.25). Analog zum elektrischen Fall (vgl. Übungsaufgabe) erhält man eine Steighöhe $h = 1/(2\rho g)\mu_0\chi_m H^2$. Bei bekannter Dichte ρ lässt sich hieraus χ_m bestimmen.

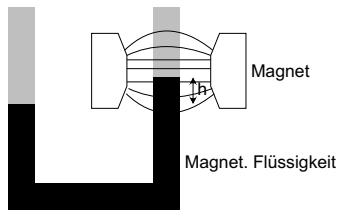


Abbildung 3.25:
Steighöhenmethode zur Bestimmung von χ_m

Ein ähnlicher (allerdings deutlich stärkerer) Effekt wird beobachtet, wenn man einen Weicheisenstab unter der Bohrung einer Feldspule anbringt. Schaltet man den Strom durch die Spule ein, wird der Stab in die Spule gezogen und schwingt dort für einige Zeit auf- und ab.