Alfred Rieckers
Kurt Bräuer

Einladung zur Mathematik

Eine mathematische Einführung und Begleitung zum Studium der Physik und Informatik, Logos Verlag 2002

Lösungen zu den Übungsaufgaben

(Fehlerhinweise bitte an kurt.braeuer@uni-tuebingen.de)

Kapitel 2

Übungsbeispiel 2.1

mit

$$\cos^2 x + \sin^2 = 1, \quad \cos^3 x = \tfrac{1}{4}\left(3\cos x + \cos 3x\right), \quad \sin^3 x = \tfrac{1}{4}\left(3\sin x - \sin 3x\right),$$

berechnen wir

$$\begin{aligned}
e^{3ix} &= \left(\cos x + i\sin x\right)^3 \\
&= \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x \\
&= \cos x\left(\cos^2 x - 3\sin^2 x\right) - i\sin x\left(\sin^2 x - 3\cos^2 x\right) \\
&= \cos x\left(\cos^2 x - 3\left(1-\cos^2 x\right)\right) - i\sin x\left(\sin^2 x - 3\left(1-\sin^2 x\right)\right) \\
&= \cos x\left(4\cos^2 x - 3\right) - i\sin x\left(4\sin^2 x - 3\right) \\
&= \left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) - i\left(4\sin^3 x - 3\sin x\right) \\
&= \left(\left(3\cos x + \cos 3x\right) - 3\cos x\right) - i\left(\left(3\sin x - \sin 3x\right) - 3\sin x\right) \\
&= \cos 3x + i\sin 3x
\end{aligned}$$

einfacher es ist natürlich, die Definition der e-Funktion aus Kapitel 2 zu verwenden:

wegen

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

gilt

$$\left(e^{ix}\right)^3 = e^{i3x} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\cos x + i\sin x\right)^3 = \left(\cos 3x + i\sin 3x\right)$$

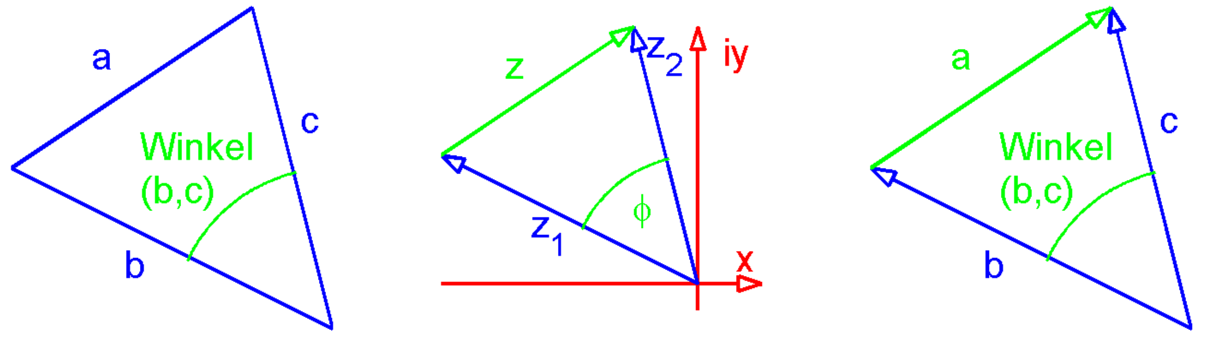
Übungsbeispiel 2.2

$$\begin{array}{ll} (1) & e^{ix} = \cos x + i\sin x \\ (2) & e^{-ix} = \cos x - i\sin x \\ \hline \tfrac{1}{2}\big((1)+(2)\big) & \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \cos x \end{array}
\qquad
\begin{array}{ll} (1) & e^{ix} = \cos x + i\sin x \\ (2) & e^{-ix} = \cos x - i\sin x \\ \hline \tfrac{1}{2i}\big((1)-(2)\big) & \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \sin x \end{array}$$

Übungsbeispiel 2.3

Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(b,c)$$



Bezeichnungen zum Kosinussatz (links) und zu den Beweisen in der komplexen Zahlenebene (mitte) und mit Vektoren (rechts)

In der komplexen Zahlenebene

$$z_1 = r_1 e^{i\alpha_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\alpha_2};$$
$$z = se^{i\alpha} \equiv (z_1 - z_2) = \left(r_1 e^{i\alpha_1} - r_2 e^{i\alpha_2}\right)$$

also

$$\begin{aligned} s\cos\alpha + is\sin\alpha &= r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1) - r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) \\ &= r_1\cos\alpha_1 - r_2\cos\alpha_2 + i(r_1\sin\alpha_1 - r_2\sin\alpha_2) \end{aligned}$$

Vergleich

$$\begin{array}{rl} \text{Realteil:} & s\cos\alpha = r_1\cos\alpha_1 - r_2\cos\alpha_2 \\ \text{Imaginärteil:} & s\sin\alpha = (r_1\sin\alpha_1 - r_2\sin\alpha_2) \end{array}$$

durch quadrieren erhält man

$$\begin{array}{ll} (1) & s^2\cos^2\alpha = r_1^2\cos^2\alpha_1 + r_2^2\cos^2\alpha_2 - 2r_1 r_2 \cos\alpha_1\cos\alpha_2 \\ (2) & s^2\sin^2\alpha = r_1^2\sin^2\alpha_1 + r_2^2\sin^2\alpha_2 - 2r_1 r_2 \sin\alpha_1\sin\alpha_2 \\ \hline (1)+(2) & s^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \underbrace{\left(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2\right)}_{=\cos(\alpha_1-\alpha_2)=\cos(\alpha)} \end{array}$$

also folgt der Kosinussatz

$$s^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\left(\alpha_1 - \alpha_2\right)$$

Beweis mit Vektoren:

$$\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$$

$$\vec{a}^2 = \left(\vec{b} + \vec{c}\right)^2 = \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(b,c\right)$$