Alfred Rieckers
Kurt Bräuer

Einladung zur Mathematik

Eine mathematische Einführung und Begleitung zum Studium der Physik und Informatik, Logos Verlag 2002

Lösungen zu den Übungsaufgaben

(Fehlerhinweise bitte an kurt.braeuer@uni-tuebingen.de)

Kapitel 3

Übungsbeispiel 3.6 (1)

a)

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25+1+9} = \sqrt{35}$$

b)

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (3+2+5, 2-3-1, 1-4-3) = (10, -2, -6)$$

$$\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (3+2-5, 2-3+1, 1-4+3) = (0, 0, 0)$$

$$\vec{a} - (\vec{b} + \vec{c}) = (3-2-5, 2+3+1, 1+4+3) = (-4, 6, 8)$$

$$\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \vec{a} - (\vec{b} + \vec{c}) = (-4, 6, 8)$$

c)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot (-4) = 6 + -6 - 4 = -4$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-4) - 1 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 2 - 3(-4) \\ 3 \cdot (-3) - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 14 \\ -13 \end{pmatrix}$$

d)

$$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}=\frac{-4}{\sqrt{14}\sqrt{29}}=\frac{-4}{\sqrt{406}}$$

$$\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{ab}=\frac{1}{\sqrt{406}}\begin{pmatrix}-5\\14\\-13\end{pmatrix}$$

Übungsbeispiel 3.6 (2)

a)

$$A-B=\left(-2-4,1-\left(-1\right)\right)=\left(-6,2\right)$$
$$D-C=\left(1-7,4-2\right)=\left(-6,2\right)$$
also
$$A-B=D-C$$

$$A-B=\left(3-6,2-3,1-4\right)=\left(-3,-1,-3\right)$$
$$D-C=\left(2-5,-2-\left(-1\right),-1-2\right)=\left(-3,-1,-3\right)$$
also
$$A-B=D-C$$

b)

$$\left(B-A\right)\times\left(C-A\right)=\begin{pmatrix}4-\left(-2\right)\\-1-1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}7-\left(-2\right)\\2-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}9\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\6-\left(-2\cdot 9\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\24\end{pmatrix}$$
$$F=\left|\left(B-A\right)\times\left(C-A\right)\right|=24$$

$$\left(B-A\right)\times\left(C-A\right)=\begin{pmatrix}6-3\\3-2\\4-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5-3\\-1-2\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1-3\left(-3\right)\\3\cdot 2-3\cdot 1\\3\cdot\left(-3\right)-1\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\3\\-11\end{pmatrix}$$
$$F=\left|\left(B-A\right)\times\left(C-A\right)\right|=\sqrt{8^2+3^2+\left(-11\right)^2}=\sqrt{64+9+121}=\sqrt{194}$$

Übungsbeispiel 3.6 (3)

Kosinussatz

$$\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$$
$$\vec{a}^2 = \left(\vec{b} - \vec{c}\right)^2, \quad \text{also}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(\vec{b},\vec{c}\right)$$

Sinussatz

Die Fläche des Dreiecks ist

$$F_\Delta = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{b}\times\vec{c}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{c}\times\vec{a}\right|, \quad \text{also}$$
$$ab\sin\left(\vec{b},\vec{c}\right) = bc\sin\left(\vec{b},\vec{c}\right) = ca\sin\left(\vec{c},\vec{b}\right)$$

oder

$$\frac{ab\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{bc\sin\left(\vec{b},\vec{c}\right)} = 1 \quad \Rightarrow \quad a\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right) = c\sin\left(\vec{b},\vec{c}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\underbrace{\sin\left(\vec{b},\vec{c}\right)}_{=(\alpha)}} = \frac{c}{\underbrace{\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)}_{=(\gamma)}}$$

$$\frac{bc\sin\left(\vec{b},\vec{c}\right)}{ca\sin\left(\vec{c},\vec{a}\right)} = 1 \quad \Rightarrow \quad b\sin\left(\vec{b},\vec{c}\right) = a\sin\left(\vec{c},\vec{a}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{\underbrace{\sin\left(\vec{c},\vec{a}\right)}_{=(\beta)}} = \frac{a}{\underbrace{\sin\left(\vec{b},\vec{c}\right)}_{=(\alpha)}}$$

Übungsbeispiel 3.7 (1)

$$\vec{x} = P + \lambda\left(Q - P\right)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-2 \\ 0-3 \end{pmatrix}$$

also

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ y = 3 - 3\lambda \end{cases}$$

den Punkt *M,* der die Verbindung zwischen *P* und *Q* halbiert, erhält man für λ*=1/2*:

$$M = P + \tfrac{1}{2}\left(Q - P\right) = \tfrac{1}{2}\left(Q + P\right) = \tfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \tfrac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Übungsbeispiel 3.7 (2)

a)

$$\vec{x} = P + \lambda_1 (Q_1 - P) + \lambda_2 (Q_2 - P)$$
$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 3-4 \\ 4-2 \\ -1-(-1) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3-4 \\ 3-2 \\ 3-(-1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{n} = \frac{(Q_1 - P)\times(Q_2 - P)}{\left|(Q_1 - P)\times(Q_2 - P)\right|} = \frac{1}{\left|(Q_1 - P)\times(Q_2 - P)\right|} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\left|(Q_1 - P)\times(Q_2 - P)\right|} \begin{pmatrix} 2\cdot 4-(0)\cdot 1 \\ (0)\cdot(-1)-(-1)\cdot 4 \\ (-1)\cdot 1-2\cdot(-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{8^2+4^2+1^2}} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{64+16+1}} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{81}} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Wir nehmen an, dass der Punkt in der Ebene liegt und versuchen die Parameter zu berechnen

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} (1) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + 1 = 0 \\ (2) \quad 2\lambda_1 + \lambda_2 - 1 = 0 \\ (3) \quad 0\lambda_1 + 4\lambda_2 + 12 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{array}{lll} (2)-(1) & \lambda_1 - 2 = 0 & \text{also} \quad \lambda_1 = 2 \\ \text{in } (1) & 2 + \lambda_2 + 1 = 0 & \text{also} \quad \lambda_2 = -3 \\ \text{in } (3) & 4(-3) + 12 = 0 & \end{array}$$

Wir haben eine konsistente Lösung gefunden, also liegt *M* in der Ebene