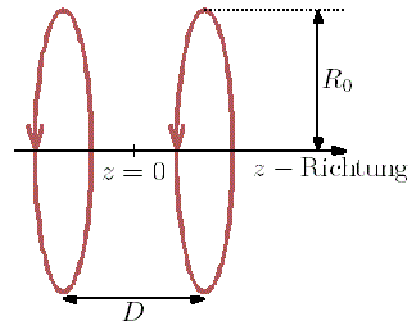


1. Helmholtz-Spule

Eine Helmholtz-Spulen-Anordnung besteht aus zwei in gleicher Richtung stromdurchflossenen Leiterringen mit einer gemeinsamen Achse. Spulen-Radius und -Abstand sind gleich ($R_0 = D$), was ein optimal homogenes Magnetfeld zwischen die Spulen bewirkt.



Wir berechnen die Feldlinien in der x - z -Ebene und stellen sie graphisch dar.

Felder

Vektorpotential:
$$\vec{A}(\vec{R}) = \int \vec{j}(\vec{r}) \frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|} \frac{d^3r}{r dr d\varphi dz} \quad (1-1)$$

Strom:
$$\vec{j}(\vec{r}) = J \frac{1}{r} \vec{g}_\varphi \delta(r - R_0) \left(\delta\left(z - \frac{D}{2}\right) + \delta\left(z + \frac{D}{2}\right) \right)$$

mit:
$$\vec{R} = X\vec{g}_x + Z\vec{g}_z, \quad \vec{r} = r\vec{g}_r + z\vec{g}_z$$

Einsetzen

$$\vec{A}(\vec{R}) = \int J \frac{1}{r} \vec{g}_\varphi \delta(r - R_0) \left(\delta\left(z - \frac{D}{2}\right) + \delta\left(z + \frac{D}{2}\right) \right) \frac{1}{\sqrt{(\vec{R} - \vec{r})^2}} r dr d\varphi dz \quad (1-2)$$

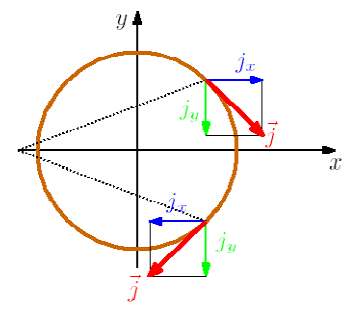
$$= J \int \vec{g}_\varphi \delta(r - R_0) \left(\delta\left(z - \frac{D}{2}\right) + \delta\left(z + \frac{D}{2}\right) \right) \frac{1}{\sqrt{\vec{R}^2 + \vec{r}^2 - 2\vec{R} \cdot \vec{r}}} dr d\varphi dz$$

$$\frac{1}{\sqrt{\vec{R}^2 + \vec{r}^2 - 2\vec{R} \cdot \vec{r}}} = \frac{1}{\sqrt{X^2 + Z^2 + r^2 + z^2 - 2(Xr \cos \varphi + Zz)}} = \frac{1}{\sqrt{X^2 + (Z - z)^2 + r^2 - 2Xr \cos \varphi}}$$

$$= J \int \left[\frac{\vec{g}_\varphi}{\sqrt{X^2 + \left(Z - \frac{D}{2}\right)^2 + R_0^2 - 2XR_0 \cos \varphi}} + \frac{\vec{g}_\varphi}{\sqrt{X^2 + \left(Z + \frac{D}{2}\right)^2 + R_0^2 - 2XR_0 \cos \varphi}} \right] d\varphi$$

x -Komponente A_x des Vektorpotentials

Aus Symmetriegründen muss die x -Komponente des Vektorfeldes in der x - z -Ebene verschwinden.



y-Komponente A_y des Vektorpotentials

mit
$$\vec{g}_\varphi = \begin{pmatrix} -R_0 \sin \varphi \\ R_0 \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1-3)$$

ist
$$A_y(X, Z) = JR_0 \int \left[\frac{1}{\sqrt{X^2 + \left(Z - \frac{D}{2}\right)^2 + R_0^2 - 2XR_0 \cos \varphi}} + \frac{1}{\sqrt{X^2 + \left(Z + \frac{D}{2}\right)^2 + R_0^2 - 2XR_0 \cos \varphi}} \right] \cos \varphi d\varphi$$

Das Integral in (1-3) kann für jeden Punkt (X, Z) numerisch berechnet werden.

Darstellung der Feldlinien

Die magnetischen Feldlinien sind die Höhenlinien der *y*-Komponente des Vektorpotentials A_y .

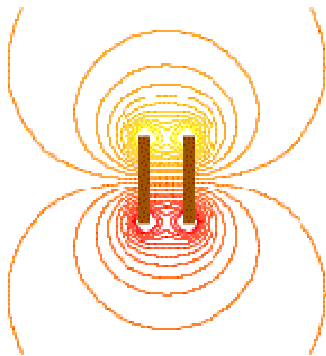
Vektorpotential:
$$\vec{A}(x, 0, z) = A_y(x, z) \hat{e}_y \quad (1-4)$$

$A_z(x, z)=0$: \vec{j} hat keine z-Komponente
 $A_x(x, z)=0$: $j_x(x, y, z) = -j_x(x, -y, z)$

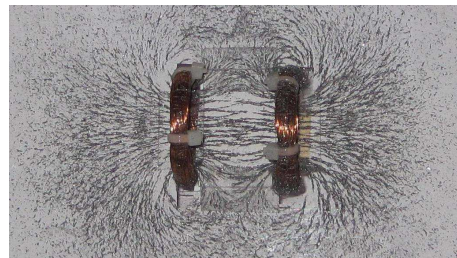
Feldlinien:

$$\underbrace{0 = \vec{B} \times d\vec{r}}_{\text{Bestimmungsgleichung}} = \begin{pmatrix} B_y dz - B_z dy \\ B_z dx - B_x dz \\ B_x dy - B_y dx \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{l} \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dz - \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dy \\ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) dx - \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dz \\ \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) dy - \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) dx \end{array} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial A_y(x, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial A_y(x, z)}{\partial z} dz \right) \hat{e}_y = dA_y(x, z) \hat{e}_y = 0$$



Theorie



Experiment