K.Bräuer: Philosophische Aspekte der modernen Physik, SS 2014

# - Theorie -

# 2. Lorentz-Invarianz

| | | |
|---|---|---|
| Lichtsignalausbreitung: | kein Medium wie Wasser oder Luft | *(2-1)* |
| Wahrnehmung: | Ursache (Quelle) und Wirkung | |
| Konsequenz: | $c$ unabhängig vom Bezugssystem | |
| und | Raum-und Zeit nur in Bezug zum Beobachter | |
| Philosophie und Psychologie: | Raum und Zeit entsteht im Kopf des bewussten Beobachters | |

*Lichtsignalen*

Ausbreitung:

$$\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{\text{Abstandsquadrat von der Lichtquelle}} - \underbrace{c^2t^2}_{\text{in } t \text{ zurück-gelegter Weg}} = 0 \qquad \textit{(2-2)}$$

in einem anderen Koordinatensystem: $x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0, \quad (c=c'!)$

Invariante Formulierung

als Vektorlänge: $\left(\vec{r}^{(4)}\right)^2 = \left(\vec{r}'^{(4)}\right)^2 = 0$

mit Viererort: $\vec{r}^{(4)} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z + ict\hat{e}_t$

oder: $\vec{r}^{(4)} = \begin{pmatrix} \vec{r} \\ ict \end{pmatrix}$

*Minkowski-Metrik*

Generalisierte Koordinaten: $q^i = x^i, \quad q^i = ct$ *(2-3)*

Ortsdifferential: $d\vec{r}^{(4)} = dq^i\vec{g}_i^{(4)} + dq^4\vec{g}_4^{(4)}; \quad i\in\{1..3\}$

Grundvektoren: $\vec{g}_i^{(4)} = \hat{e}_i, \quad \vec{g}_4^{(4)} = \dfrac{\partial\vec{r}^{(4)}}{\partial ct} = i\hat{e}_4$

Kontravariant: $\vec{g}^{(4)i} = \hat{e}_i, \quad \vec{g}^{(4)i} = -i\hat{e}_4$

Minkowski-Metrik: $\left(g_{\mu\nu}\right) = \left(g^{\mu\nu}\right) = diag\left(1,1,1,-1\right)$

*Lorentz-Transformation (LT)*

Bezugssysteme: $K,\quad K'$ (2-4)

Relativgeschwindigkeit: $v$

Lorentz-Transformation: $\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \underbrace{\left(T_L\right)}_{\substack{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \\ \text{4 Elemente}}} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix},\quad \underbrace{y' = y, z' = z}_{\substack{\text{durch geeignete Wahl} \\ \text{der Raumrichtungen}}}$

*Festlegung von $\left(T_L\right)$*

Invarianzbedingung: $\underbrace{x'^2 - \left(ct'\right)^2}_{\left(T_{L,11}x+T_{L,12}ct\right)^2-\left(T_{L,21}x+T_{L,22}ct\right)^2} = x^2 - \left(ct\right)^2$ (2-5)

Vergleich der Koeffizienten:

$$\underbrace{\left(T_{L,11}^2 - T_{L,21}^2 - 1\right)}_{=0} x^2 + \underbrace{\left(T_{L,12}^2 - T_{L,22}^2 - 1\right)}_{=0} \left(ct\right)^2 + \underbrace{2\left(T_{L,11}^2 \cdot T_{L,12}^2 - T_{L,21}^2 \cdot T_{L,22}^2\right)}_{=0} x \cdot ct = 0$$

Relativbewegung der Systme: $\underbrace{0 = x'}_{\text{Ruhesystem}} = T_{L,11}x + T_{L,12}ct$ und $v = \frac{x}{t}$

Lösung der vier Gleichungen $\rightarrow$: $\left(T_L\right) = \gamma \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix},$ mit $\gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - v^2/c^2}}$

*Invariante Zeit oder Eigenzeit eines Raum-Zeit-Punktes*

$LT$ ins Ruhesystem: $\begin{pmatrix} 0 \\ c\tau \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix},$ mit $x = -vt$ (2-6)

also: $c\tau = \gamma\left(\frac{xv}{c} + ct\right) = \gamma\left(-\frac{v^2 t}{c} + ct\right) = \gamma \underbrace{\left(-\frac{v^2}{c^2} + 1\right)}_{\gamma^{-2}} ct$

Eigenzeit ~ Beobachterzeit: $\tau = \frac{1}{\gamma} t$

*Vierergeschwindigkeit eines Raum-Zeit-Punktes*

Vierergeschwindigkeit: $\vec{v}^{(4)} \equiv \frac{d\vec{x}^{(4)}}{d\tau} = \gamma \frac{d\vec{x}^{(4)}}{dt},\quad \vec{v}^{(4)} = \gamma \frac{d}{dt}\left(\vec{x}, ct\right) = \gamma\left(\vec{v}, c\right)$ (2-7)

Länge (Invariante): $\vec{v}^{(4)2} = \gamma^2\left(g_{ij}v^i v^j + g_{44}c^2\right) = \underbrace{\gamma^2}_{\frac{1}{1-v^2/c^2} = \frac{c^2}{c^2-v^2}} \left(v^2 - c^2\right) = -c^2$