

# Strukturmechanische Schwingungen mit der Finiten Elemente Methode

## Unterlagen für die Durchführung des Praktikumsversuches

### 1. Schritt: Datenfiles mit Definition der Gitterelemente einlesen

Datenfiles:   Rechteck\_4.asc     (Vergleich mit u.a. Matricelementen)  
 Recht-                     (Vergleich mit analytischem Spektrum)  
 eckPi\_200.asc             (Vergleich mit analytischem Spektrum)  
 Recht-  
 eckPi\_1054.asc  
 Kreis\_13.asc  
 Kreis\_201.asc             (Kann der Unterschied dieser beiden  
 Violine\_65.asc           Trommeln gehört werden?)  
 Violine\_508.asc  
 Trom-  
 melA\_321.asc  
 Trom-  
 melB\_321.asc

Die Zahl nach '\_' steht für die Anzahl der Elemente  $N^{(Elemente)}$

Die Definition der Gitter besteht aus

$$\text{Matrix } tri(i, k) = n, \quad \underbrace{n \in N^{(Stütz)}}_{\text{Index der Stützstelle}}, \underbrace{i \in N^{(Elemente)}}_{\text{Index des Elements}}, \underbrace{k \in \{1..3\}}_{\text{Index der Stützstelle im Element}}$$

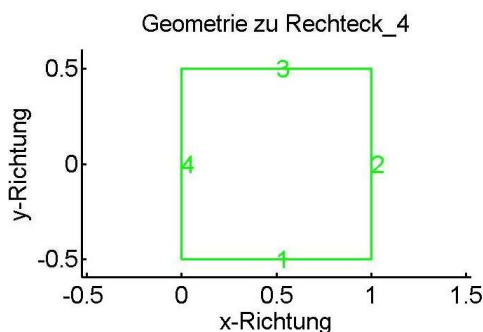
und den Positionen der Stützstellen

$$x(n), y(n), \quad n \in N^{(Stütz)}$$

(In MatLab ist die Funktion *fscanf* zum Einlesen jeder der beiden Matrizen geeignet)

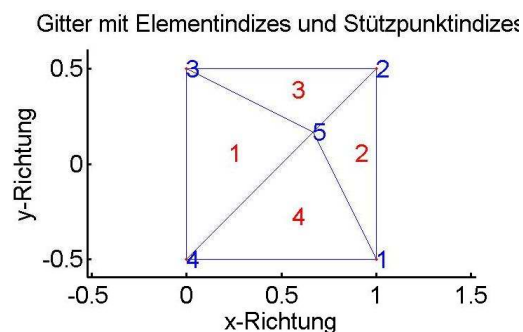
*Beispiel Rechteck\_4:*

Graphische Darstellung des Gitters:



Zuordnungsmatrix 'tri',  $N^{(Element)}=4$ :

3	4	5
5	1	2
3	5	2
5	4	1



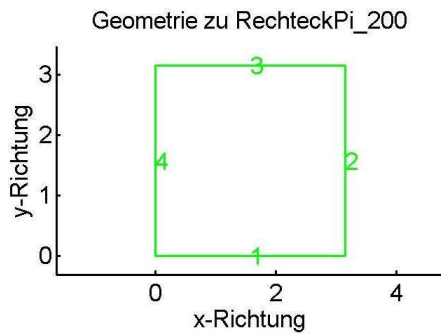
Koordinaten der Stützpunkte 'x' 'y',  $N^{(Stuetz)}=5$ :

1	-0.5
1	0.5
0	0.5
0	-0.5
0.67	0.17

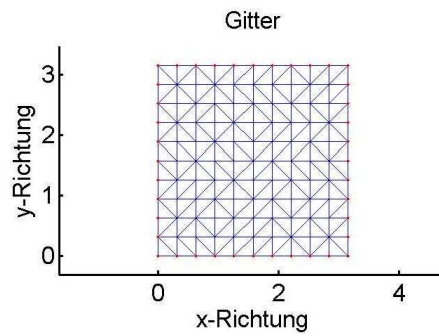
Inhalt der Datei *Rechteck\_4.asc*:

<i>Tri</i>	<i>X-Y</i>
3 4 5	1.0000000 -0.5000000
5 1 2	1.0000000 0.5000000
3 5 2	0.0000000 0.5000000
5 4 1	0.0000000 -0.5000000
	0.6700000 0.1700000

Die Anzahl der Stützstellen  $N^{(\text{Stuetz})}$  ergibt sich als maximales Element in *tri*.

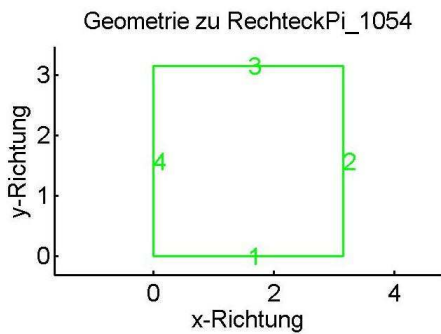


Zuordnungsmatrix 'tri',  $N^{(\text{Element})}=200$ :

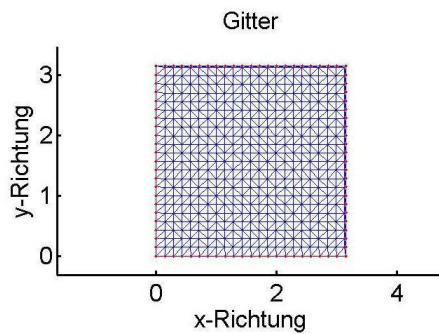


Koordinaten der Stützpunkte 'x' 'y',  $N^{(\text{Stuetz})}=121$ :

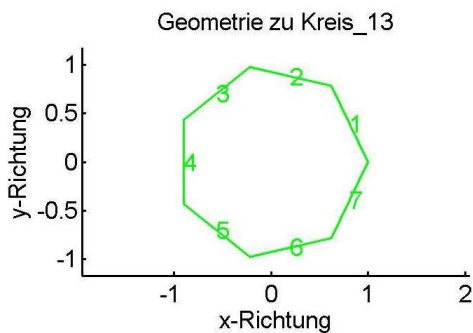
Weitere DatenFiles



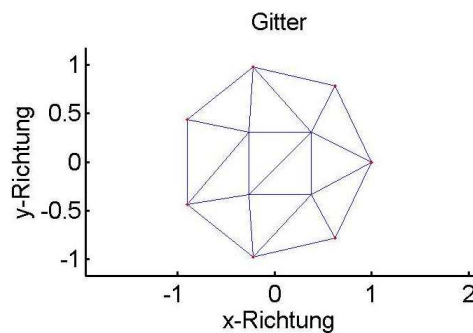
Zuordnungsmatrix 'tri',  $N^{(\text{Element})}=1054$ :



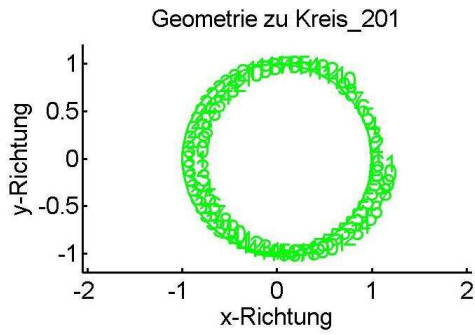
Koordinaten der Stützpunkte 'x' 'y',  $N^{(\text{Stuetz})}=572$ :



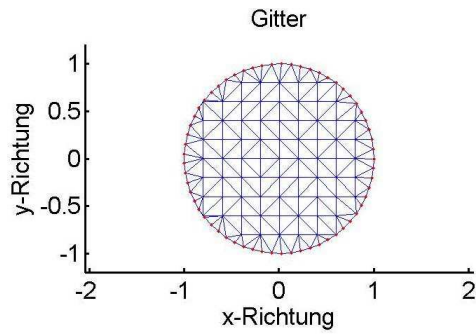
Zuordnungsmatrix 'tri',  $N^{(\text{Element})}=13$ :



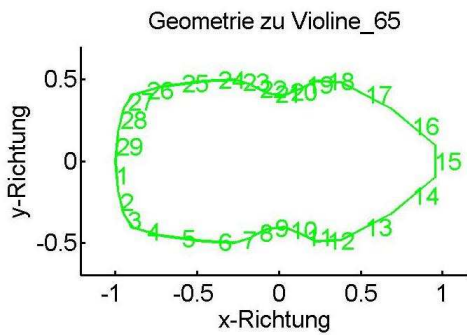
Koordinaten der Stützpunkte 'x' 'y',  $N^{(\text{Stuetz})}=11$ :



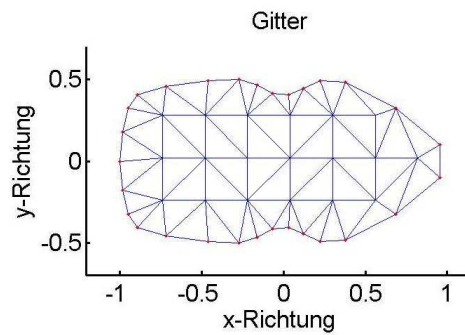
Zuordnungsmatrix 'tri',  $N^{(Element)}=201$ :



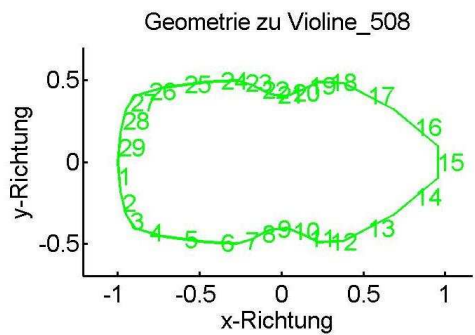
Koordinaten der Stützpunkte 'x' 'y',  $N^{(Stuetz)}=132$ :



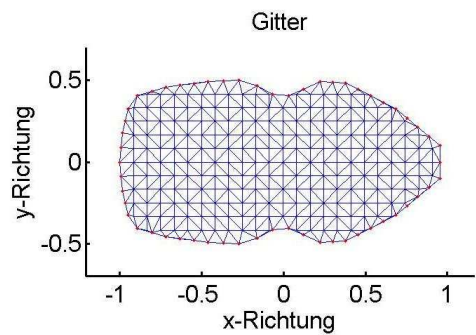
Zuordnungsmatrix 'tri',  $N^{(Element)}=65$ :



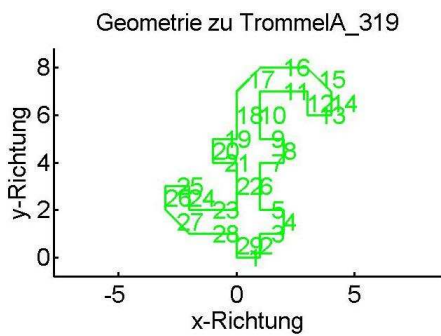
Koordinaten der Stützpunkte 'x' 'y',  $N^{(Stuetz)}=48$ :



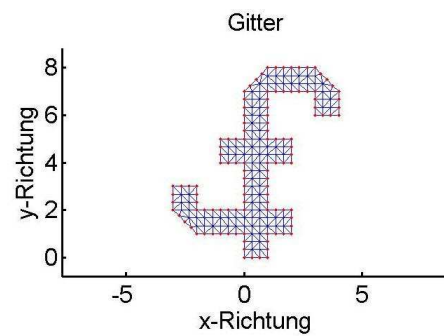
Zuordnungsmatrix 'tri',  $N^{(Element)}=516$ :



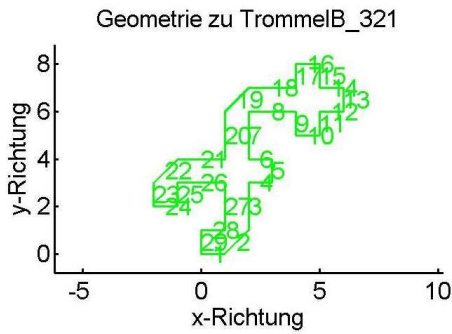
Koordinaten der Stützpunkte 'x' 'y',  $N^{(Stuetz)}=283$ :



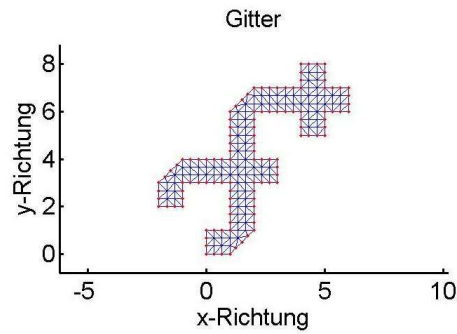
Zuordnungsmatrix 'tri',  $N^{(Element)}=318$ :



Koordinaten der Stützpunkte 'x' 'y',  $N^{(Stuetz)}=217$ :



Zuordnungsmatrix 'tri',  $N^{(\text{Element})}=318$ :



Koordinaten der Stützpunkte 'x' 'y',  $N^{(\text{Stuetz})}=217$ :

## 2. Schritt: Graphische Darstellung der Gitter

entsprechend den obigen Darstellungen

(eventuell mit GnuPlot: 'Plot(filename) with lines (oder linesp)', 1 Leerzeile zwischen den einzelnen Elementen!)

(In MatLab eignet sich die Funktion *fill*. Mit ihr können alle Elemente mit einem einzigen Aufruf gezeichnet werden).

## 3. Schritt: Berechnung der Matrizen

Die Matrizen werden teilweise recht groß und sind sehr dünn besetzt. Daher sind 'sparse' Matrizen dringend zu empfehlen!

Die folgenden Zahlenbeispiele beziehen sich auf die Daten von *Rechteck\_4.asc*

Zu berechnen sind

Volumen  $g$  der Elemente entsprechend (50):

$$g(i) = \{x(\text{tri}(i,2)) - x(\text{tri}(i,1))\} \{y(\text{tri}(i,3)) - y(\text{tri}(i,1))\} \\ - \{x(\text{tri}(i,3)) - x(\text{tri}(i,1))\} \{y(\text{tri}(i,2)) - y(\text{tri}(i,1))\} \\ \forall i \in N^{(\text{Elemente})}$$

Massenmatrix  $D$  entsprechend (33)

$$D = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} g(1) & & 0 & & & & \\ & g(1) & & & & & \\ 0 & & g(1) & & & & \\ & & & g(2) & & & \\ & & 0 & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ \vdots & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Matrizen der Basiskoeffizienten  $\mathcal{A}$  entsprechend (15)

mit 
$$X^{(i)} = \begin{pmatrix} x(\text{tri}(i,1)) & x(\text{tri}(i,2)) & x(\text{tri}(i,3)) \\ y(\text{tri}(i,1)) & y(\text{tri}(i,2)) & y(\text{tri}(i,3)) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist 
$$A^{(i)} = \left(X^{(i)}\right)^{-1} \quad \forall i \in N^{(\text{Elemente})}$$

Die Inverse kann für 3x3-Matrizen leicht mit Hilfe Unterdeterminanten berechnet werden:

$$X^{-1} = (a_{ij}), \quad \text{mit } a_{ji} = \frac{(-1)^{i-j} X_{ij}}{\det(X)} \quad \text{und } X_{ij} = \det(X_{\text{Zeile } i \text{ und Spalte } j \text{ gestrichen}})$$

Auf [www.kbraeuer.de](http://www.kbraeuer.de) ist ein kleines MatLab-Programm zu finden, das halt noch in die verwendete Computersprache übersetzt werden muss.

Steifheitsmatrizen  $K$  nach (33)

mit 
$$K^{(i)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(i)}a_{11}^{(i)} + a_{12}^{(i)}a_{12}^{(i)} & a_{11}^{(i)}a_{21}^{(i)} + a_{12}^{(i)}a_{22}^{(i)} & a_{11}^{(i)}a_{31}^{(i)} + a_{12}^{(i)}a_{32}^{(i)} \\ a_{21}^{(i)}a_{11}^{(i)} + a_{22}^{(i)}a_{12}^{(i)} & a_{21}^{(i)}a_{21}^{(i)} + a_{22}^{(i)}a_{22}^{(i)} & a_{21}^{(i)}a_{31}^{(i)} + a_{22}^{(i)}a_{32}^{(i)} \\ a_{31}^{(i)}a_{11}^{(i)} + a_{32}^{(i)}a_{12}^{(i)} & a_{31}^{(i)}a_{21}^{(i)} + a_{32}^{(i)}a_{22}^{(i)} & a_{31}^{(i)}a_{31}^{(i)} + a_{32}^{(i)}a_{32}^{(i)} \end{pmatrix}$$

$\forall i \in N^{(\text{Elemente})}$

ist 
$$K = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} g(1)K^{(1)} & & & 0 \\ & g(2)K^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & g(3)K^{(N^{(\text{Elemente})})} \end{pmatrix}$$

Transformation auf eindeutige Stützstellen nach(36)

$$T(n, 3(i-1) + k) = \delta_{n, \text{tri}(i,k)}, \quad \forall i \in N^{(\text{Elemente})}, \quad k \in \{1..3\}$$

Ergebnisse für die Daten aus *Rechteck\_4.asc*:

$\text{tri} = \begin{matrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{matrix}$	$X = \begin{matrix} 1.0000 & 1.0000 & 0 & 0 & 0.6700 \\ -0.5000 & 0.5000 & 0.5000 & -0.5000 & 0.1700 \end{matrix}$
---	--

$T = \begin{matrix} (3,1) & 1 \\ (4,2) & 1 \\ (5,3) & 1 \\ (5,4) & 1 \\ (1,5) & 1 \\ (2,6) & 1 \\ (3,7) & 1 \\ (5,8) & 1 \\ (2,9) & 1 \\ (5,10) & 1 \\ (4,11) & 1 \\ (1,12) & 1 \end{matrix}$	$A = \begin{matrix} -1.0000 & 1.0000 & 0.5000 \\ -0.4925 & -1.0000 & 0.5000 \\ 1.4925 & 0 & 0 \\ -3.0303 & 0 & 3.0303 \\ 1.0000 & -1.0000 & -0.5000 \\ 2.0303 & 1.0000 & -1.5303 \\ -1.0000 & 1.0000 & 0.5000 \\ 0 & -3.0303 & 1.5152 \\ 1.0000 & 2.0303 & -1.0152 \\ 0 & 1.4925 & 0.7463 \\ -1.0000 & -0.4925 & 0.7537 \\ 1.0000 & -1.0000 & -0.5000 \end{matrix}$	$D = \begin{matrix} (1,1) & 0.1117 \\ (2,2) & 0.1117 \\ (3,3) & 0.1117 \\ (4,4) & 0.0550 \\ (5,5) & 0.0550 \\ (6,6) & 0.0550 \\ (7,7) & 0.0550 \\ (8,8) & 0.0550 \\ (9,9) & 0.0550 \\ (10,10) & 0.1117 \\ (11,11) & 0.1117 \\ (12,12) & 0.1117 \end{matrix}$
---	---	--

$K =$	$(4,5)$ 0.5000	$(7,9)$ -0.1700
$(1,1)$ -0.6700	$(5,5)$ -0.3300	$(8,9)$ 1.0152
$(2,1)$ 0.1700	$(6,5)$ -0.1700	$(9,9)$ -0.8452
$(3,1)$ 0.5000	$(4,6)$ 1.0152	$(10,10)$ -0.7463
$(1,2)$ 0.1700	$(5,6)$ -0.1700	$(11,10)$ 0.2463
$(2,2)$ -0.4163	$(6,6)$ -0.8452	$(12,10)$ 0.5000
$(3,2)$ 0.2463	$(7,7)$ -0.3300	$(10,11)$ 0.2463
$(1,3)$ 0.5000	$(8,7)$ 0.5000	$(11,11)$ -0.4163
$(2,3)$ 0.2463	$(9,7)$ -0.1700	$(12,11)$ 0.1700
$(3,3)$ -0.7463	$(7,8)$ 0.5000	$(10,12)$ 0.5000
$(4,4)$ -1.5152	$(8,8)$ -1.5152	$(11,12)$ 0.1700
$(5,4)$ 0.5000	$(9,8)$ 1.0152	$(12,12)$ -0.6700
$(6,4)$ 1.0152		

$TDT^t =$	$TKT^t =$	$(4,3)$ 0.1700
$(1,1)$ 0.1667	$(1,1)$ -1.0000	$(5,3)$ 1.0000
$(2,2)$ 0.1100	$(2,1)$ -0.1700	$(1,4)$ 0.1700
$(3,3)$ 0.1667	$(4,1)$ 0.1700	$(3,4)$ 0.1700
$(4,4)$ 0.2233	$(5,1)$ 1.0000	$(4,4)$ -0.8325
$(5,5)$ 0.3333	$(1,2)$ -0.1700	$(5,4)$ 0.4925
	$(2,2)$ -1.6903	$(1,5)$ 1.0000
	$(3,2)$ -0.1700	$(2,5)$ 2.0303
	$(5,2)$ 2.0303	$(3,5)$ 1.0000
	$(2,3)$ -0.1700	$(4,5)$ 0.4925
	$(3,3)$ -1.0000	$(5,5)$ -4.5228

#### Schritt 4: Lösen des Eigenwertproblems

Zu lösen ist das Eigenwertproblem nach (37):

$$\text{mit } \tilde{K} = TKT^t \text{ und } \tilde{D} = TDT^t$$

$$\tilde{K}\tilde{U} = \lambda\tilde{D}\tilde{U}$$

Es sollten dabei, wenn möglich, nur wenige Eigenvektoren und Eigenwerte um  $\lambda = 0$  berechnet werden!

Es können die Routinen TRED2 TQLI aus den 'numerical recipes' verwendet werden (siehe NumRes.zip ohne Link auf der HomePage)

Achtung! Manche Eigenproblem-Routinen (Jacobi-Methode) lösen nur  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$  für symmetrische Matrizen  $A$ . Man schreibt das Eigenwertproblem jedoch leicht um:

$$L: \quad LL^t = \tilde{D}, \quad \text{hier also } (L_{ii}) = \left(\sqrt{\tilde{D}_{ii}}\right)$$

$$L^{-1}: \quad L^{-1}L = \mathbf{1}, \quad \text{hier also } (L_{ii})^{-1} = (L_{ii}^{-1})$$

$$\text{damit: } \underbrace{L^{-1}\tilde{K}(L^t)^{-1}}_{\tilde{K}} \underbrace{L^t\tilde{U}}_{\tilde{U}} = \lambda \underbrace{L^t\tilde{U}}_{\tilde{U}}$$

Zum Test eignet sich *RechteckPi\_1054* oder *RechteckPi\_200* Die Eigenwerte können analytisch angegeben werden:

Eigenfunktionen:  $u_{mn}(x, y) = \cos(mx)\cos(ny)$

Randwerte:  $\frac{\partial u_{mn}}{\partial x} = \frac{\partial u_{mn}}{\partial y} = 0 \quad \forall x \in \{0, \pi\} \text{ oder } y \in \{0, \pi\}$

Eigenwerte  $\lambda_{mn}: \left( \frac{\partial^2 u_{mn}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{mn}}{\partial y^2} \right) = -(m^2 + n^2)u_{mn}$

$(m:n)$	(0:0)	(0:1)	(1:0)	(1:1)	(2:0)	(0:2)	(1:2)	(2:1)	(2:2)	(3:0)	(0:3)
$\lambda_{mn}$	0	-1	-1	-2	-4	-4	-5	-5	-8	-9	-9

### Schritt 5: Graphische Darstellung der Eigenfunktionen

Die Basisfunktionen stellt man am einfachsten über den finiten Elementen dar.

x-Koordinaten:  $X^{(i)} = [x(\text{tri}(i,1)), x(\text{tri}(i,2)), x(\text{tri}(i,3))]$

y-Koordinaten:  $Y^{(i)} = [y(\text{tri}(i,1)), y(\text{tri}(i,2)), y(\text{tri}(i,3))]$

Amplituden:  $A_i^{(i)} = [\tilde{U}_i(\text{tri}(i,1)), \tilde{U}_i(\text{tri}(i,2)), \tilde{U}_i(\text{tri}(i,3))]$

und je nach Prammiersprache zum Beispiel

$\text{fill}(X^{(i)}, Y^{(i)}, A_i^{(i)}) \quad \forall i \in N^{(\text{Elemente})}$  für einige Eigenfunktionen  $\tilde{U}_i$ ,

oder gleich  $\text{fill}(x(\text{tri})', y(\text{tri})', \tilde{U}_i(\text{tri})')$ ,

oder mit GnuPlot:

$\text{plot}(\text{filename})...$  (2 Leerzeilen zwischen den Elementen!)

Graphische Darstellung der 9 Eigenfunktionen von TrommelA\_321 mit den kleinsten Eigenwerten:

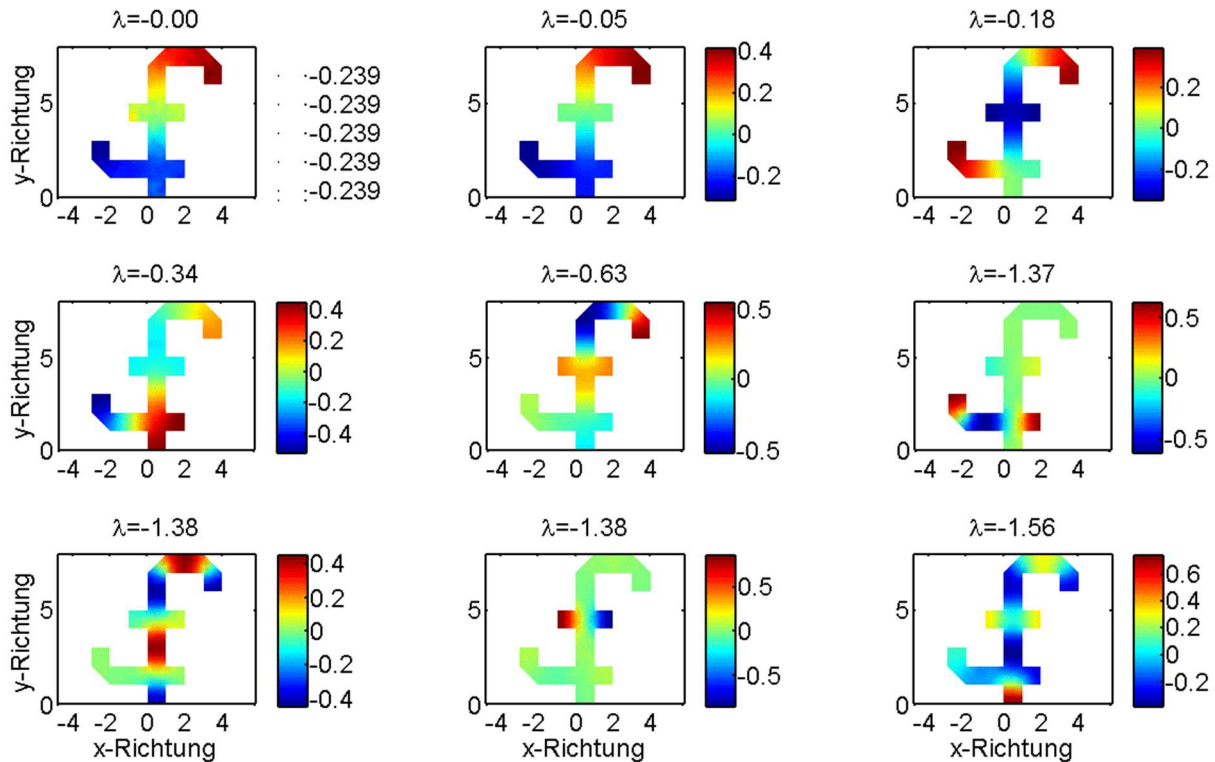


Abbildung: Eigenmoden des Verschiebungsfeldes  $u$  für den Datensatz 'TrommelA\_319'. Die Amplitude  $u(x,y)$  ist farbkodiert dargestellt entsprechend dem jeweiligen Farbbalken.  $\lambda$  sind die jeweiligen Eigenwerte.

## Schritt 6: Kann man die Form einer Trommel hören

Vergleichen Sie die Eigenspektren von *TrommelA\_321* und *TrommelB\_321* und entscheiden Sie dann die Frage.

## Schritt 7: Protokoll

Das Protokoll sollte folgendes enthalten:

1. Einleitung (Kurze Beschreibung des physikalischen Problems)
2. Theorie (Kurze Beschreibung des Formalismus)
3. Kurze Programmbeschreibung
4. Nachweis der richtigen Programmfunktion (Graphischer Vergleich mit analytischen Eigenwerten)
5. Ergebnisse
  - Graphische Darstellung der Eigenmoden von Trommel A und Trommel B.
  - Graphischer Vergleich der Eigenwertspektren von Trommel A und Trommel B.

Die graphischen Darstellungen sollen deutlich sein. Vor allem sollen sie mit gut lesbaren (großen) Buchstaben beschriftet sein (Figur, Achsen, eventuell einzelne Kurven).

Beim 'Vergleich der Eigenwertspektren' sollen Sie sich eine Darstellung überlegen, welche die Unterschiede der beiden Trommeln klar zum Ausdruck bringt und eine Abschätzung erlaubt, ob diese Unterschiede im Bereich der Rechengenauigkeit liegen. Die Rechengenauigkeit lässt sich aus dem Vergleich der numerischen und analytischen Ergebnisse beim Rechteck abschätzen.

6. Zusammenfassung