

Aufgabe 1

Geben Sie jeweils alle Teilformeln der folgenden Formeln an:

- a) $\forall z(\forall xPxz \vee \exists y\neg Pxy)$
- b) $\forall x\forall yPxy \rightarrow Rxyz$
- c) $(\exists xPxa \vee \neg\forall yQy) \wedge Qa$

Aufgabe 2

Führen Sie folgende Substitutionen aus, sofern das möglich ist:

- a) $\forall xPxy [x/y]$
- b) $\forall xPxy [y/x]$
- c) $\forall xPxy [y/z]$
- d) $\forall xPxy [z/x]$
- e) $(\forall xPxy \rightarrow Qy) [y/x]$
- f) $\exists x(Pxy \rightarrow Qy)[y/a]$
- g) $\exists x(Pxy \rightarrow Qy)[x/a]$
- h) $\exists x(Pxy \rightarrow Qy)[y/x]$
- i) $\forall xPxy [y/z] [z/y]$
- j) $\forall xPxy [x/z] [x/y]$
- k) $\forall zRxy [y/x] [x/y]$

HINWEIS: Iterierten Substitutionen werden von innen nach außen durchgeführt.

Aufgabe 3

Die Grundsymbole einer quantorenlogischen Sprache seien:

$$\mathcal{P} = \{P, Q, R\}$$

$$\mathcal{K} = \{a, b\}$$

Zur Interpretation diene hier die Struktur $\langle \mathcal{U}, \text{istkleinerals}, \text{liegtzwischen}, \text{falsch} \rangle$ über dem Universum $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3\}$ und den Attributen

$$\text{istkleinerals} = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 0, 3 \rangle\}$$

$$\text{liegtzwischen} = \{\langle 1, 0, 2 \rangle, \langle 1, 0, 3 \rangle, \langle 2, 1, 3 \rangle, \langle 2, 0, 3 \rangle\}$$

$$\text{falsch} = \{\}$$

Die Interpretation \mathfrak{I} ist gegeben durch folgende Zuordnungen:

$$\mathfrak{I}(P) = \textit{istkleinerals} \qquad \mathfrak{I}(a) = 0$$

$$\mathfrak{I}(Q) = \textit{liegtzwischen} \qquad \mathfrak{I}(b) = 2$$

$$\mathfrak{I}(R) = \textit{falsch}$$

Welche der folgenden Formeln sind wahr unter \mathfrak{I} ?

a) Pab

b) $\neg\exists xPxa$

c) $\forall x(Pxb \vee Pbx)$

d) $R \rightarrow \exists x\forall yPxy$

e) $\forall x\forall y\forall z(Pxy \wedge Pyz \rightarrow Qyxz)$