

Aufgabe 40 (2+2+2+2+2+2 Punkte + 1 Zusatzpunkt)

Zeigen Sie in NK:

- a) $\vdash \forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\forall x\varphi(x) \rightarrow \forall x\psi(x))$
- b) $\vdash \forall x\varphi(x) \rightarrow \neg\forall x\neg\varphi(x)$
- c) $\vdash \forall x\varphi(x) \rightarrow \forall z\varphi(z)$, sofern z nicht in φ vorkommt
- d) $\vdash \forall x\forall y\varphi(x, y) \rightarrow \forall x\varphi(x, x)$, sofern x frei einsetzbar für y in $\varphi(x, y)$
- e) $\vdash \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \rightarrow \forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x)$
- f) $\vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall x\psi(x))$, sofern $x \notin FV(\varphi)$
- g) Geben Sie eine Formel $\varphi(x, y)$ an, so dass $\not\models \forall x\forall y\varphi(x, y) \rightarrow \forall x\varphi(x, x)$.

Aufgabe 41 (2+2 Punkte)

Zeigen Sie in NK:

- a) $\vdash \exists x(\varphi(x) \wedge \psi) \rightarrow \exists x\varphi \wedge \psi$, sofern $x \notin FV(\psi)$
- b) $\vdash \forall x\varphi(x) \rightarrow \neg\exists x\neg\varphi(x)$

Aufgabe 42 (2+1 Zusatzpunkte)

Seien $\phi, \psi \in \mathcal{L}$ beliebige Formeln. x eine Variable, so dass $x \notin FV(\psi)$. Zeigen Sie für $Q \in \{\forall, \exists\}$ und $\square \in \{\wedge, \vee\}$ die folgende Äquivalenz (verwenden Sie Aufgabe 38):

$$Qx(\psi \square \phi) \models (\psi \square Qx\phi)$$

Formen Sie dann $(\psi(x, y) \vee \forall x\delta(x)) \rightarrow \neg\exists x(\delta(x) \wedge \forall x\gamma(x))$ in pränexer Normalform um.