Mathematische Logik II

(Gödelsche Unvollständigkeitssätze)

Vorlesung von Peter Schroeder-Heister

Wilhelm-Schickard-Institut für Informatik
Eberhard-Karls-Universität Tübingen

Skript: René Gazzari

Vorwort

Die zweistündige Vorlesung „Mathematische Logik II“ habe ich mehrfach am Wilhelm-Schickard-Institut für Informatik der Universität Tübingen gehalten, zuletzt im Sommersemester 2009. Immer wieder sind die Gödelschen Unvollständigkeitssätze Teil dieser Veranstaltung. Hierzu dieses Skriptum.

Vorausgesetzt werden grundlegende Kenntnisse der Logik, wie sie in einer Einführung in die Mathematische Logik vermittelt werden, also sichere Kenntnis der Aussagenlogik und Prädikatenlogik, etwa aufgrund der vorausgegangenen Vorlesung „Mathematische Logik I“.

Die Notation in diesem Skript lehnt sich an ebendiese Vorlesung an. Wo es geeignet erscheint, werden Begriffe aus dieser Vorlesung wiederholt. Wie dort schließt sich diese Vorlesung in vieler Hinsicht an die Darstellung im Lehrbuch „Logic and Structure“ von Dirk van Dalen an, ohne dazu jeden Einzelfall kenntlich zu machen.

René Gazzari hat das Skriptum erstellt und in vielen Teilen selbständig formuliert. Wie immer konnte ich mich auf seine große Sachkunde und Präzision verlassen.

Wir freuen uns, von unseren Fehlern zu erfahren:

psh@informatik.uni-tuebingen.de, gazzari@informatik.uni-tuebingen.de

Juli 2009, Peter Schroeder-Heister

Inhaltsverzeichnis

Überblick über das Thema

Bevor hier detailliert in das Thema eingestiegen wird, soll zunächst ein allgemeiner Überlick über die Gödelschen Unvollständigkeitssätze gegeben.

- Erster Unvollständigkeitssatz -

Der erste Unvollständigkeitssatz nach Kurt Gödel zeigt, dass die Theorie der Peano-Arithmetik (PA) – unter Vorraussetzung ihrer Konsistenz – unvollständig ist. Das bedeutet, dass es in der Sprache der Arithmetik ($\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$) einen Satz ϕ gibt, so daß weder ϕ noch seine Negation $\neg\phi$ abgeleitet werden können (Es gilt sowohl $\mathrm{PA} \nvdash \phi$ als auch $\mathrm{PA} \nvdash \neg\phi$).

Damit gibt es wahre Sätze, die in der Arithmetik nicht beweisbar sind. Dabei wird ein Satz $\phi \in \mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ als wahr bezeichnet, falls ϕ im Standard-Modell der PA – die natürlichen Zahlen mit Addition und Multiplikation – gültig ist (also: $\langle \mathbb{N}, \ldots \rangle \models \phi$).

- Vollständigkeit und Unvollständigkeit -

Die Unvollständigkeit der PA darf keinesfalls mit der Vollständigkeit des Kalküls verwechselt werden ($\mathrm{PA} \models \phi \;\Leftrightarrow\; \mathrm{PA} \vdash \phi$). Die Vollständigkeit der Prädikatenlogik erster Stufe wurde in der Vorlesung Logik I bewiesen und steht in keinem Widerpruch zur Unvollständigkeit einer erststufigen Theorie (hier PA).

Während sich der Vollständigkeitssatz allgemein auf den Konsequenzbegriff und damit auf die Gültigkeit in *allen* Modellen bezieht, bezieht sich der Unvollständigkeitssatz – wenn man ihn semantisch formuliert – auf *ein* Modell (das Standardmodell $\mathbb{N}$).

- Beweisidee -

Der Beweis des Unvollständigkeit kann dadurch gelingen, dass man in der PA über die Beweisbarkeit in der PA sprechen kann. Dies erreicht man durch die Kodierung der (informellen) Arithmetik mithilfe von primitiver Rekursion. Primitiv rekursive Funktionen und Prädikate lassen sich ihrerseits in der PA repräsentieren; das bedeutet, dass man logische Formeln findet, die sich analog zu den Funktionen und Prädikaten verhalten.

Damit kann man nun in der PA den Satz $\phi_G \in \mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ konstruieren, der seine eigene Nichtbeweisbarkeit (in der PA) aussagt. Für diesen Satz kann (metasprachlich) bewiesen werden, dass weder er selbst noch seine Negation in PA ableitbar ist ($\mathrm{PA} \nvdash \phi_G$ und $\mathrm{PA} \nvdash \neg\phi_G$). Damit ist die PA eine unvollständige Theorie.

Der Beweis der Unvollständigkeit erfolgt hier zwar für die PA, kann aber auf beliebige (rekursiv-aufzählbare) Axiomsysteme übertragen werden, die ausdrucksstark genug sind, um über ihre eigene Beweisbarkeit zu reden.

- Zweiter Unvollständigkeitssatz -

Im zweiten Unvollständigkeitssatz benutzt Gödel obiges Ergebnis und skizziert, dass in der PA – wieder unter Voraussetzung ihrer Konsistenz – die Konsistenz der PA nicht bewiesen werden kann.

Allgemeiner läßt sich sagen: für ein konsistentes, höchstens rekursiv-aufzählbares Axiomsystem kann es keinen Konsistenz-Beweis geben, der nur auf die dort zur Verfügung gestellten Mittel zurückgreift.

So benötigt etwa GERHARD GENTZEN in seinen Beweisen der Widerspruchsfreiheit der PA transfinite Induktion bis zur Ordinal-Zahl ϵ_0.[1] Diese Induktion kann nicht mehr in der PA dargestellt werden.

- Historische Einordnung -

Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze sind ein Rückschlag für das Hilbertsche Programm, das sich (unter anderem) zum Ziel gesetzt hatte, die Mathematik allein aus ihr selbst heraus durch mathematisch-logische Widerspruchsfreiheitsbeweise zu rechtfertigen. Dennoch sollte erwähnt werden, dass erst dieses Programm die Arbeit von KURT GÖDEL ermöglicht hat.

- Zur Terminologie -

Wir verwenden den Terminus „Peano-Arithmetik" (PA) für die erststufige Arithmetik mit Induktionsschema, weil es sich eingebürgert hat. Historisch ist diese Terminologie nicht ganz korrekt, da Peano (1889) auf wesentliche Ideen von Dedekind (1888) zurückgreift, die wiederum auch schon bei Frege (1879,1884) vorhanden waren. Das für PA charakteristische Induktionsschema taucht (in nicht mengen-theoretischer Fassung) weder bei Frege, Dedekind oder Peano, sondern erstmals bei Hilbert (1922) auf.

[1] $\epsilon_0 := \ldots \uparrow \omega \uparrow \omega$, wobei $\uparrow$ die Ordinalzahl-Exponentation ist. D.h.: ϵ_0 ist die erste Ordinalzahl, so dass $\omega^\alpha = \alpha$.

§1 Formale Arithmetik

Die beiden Unvollständigkeitssätze werden später für die erststufige Theorie der PA (mit Addition und Multiplikation) formuliert und bewiesen. Diese Theorie wird in diesem Abschnitt formal eingeführt.

Zusätzlich wird als Vereinfachung die Exponentation als weiteres Verküpfungszeichen in die Sprache $\mathcal{L}_{\text{PA}}$ der Arithmetik aufgenommen und dieses Zeichen definierende Axiome zur Theorie PA hinzugenommen.

Am Ende dieses Abschnittes werden noch einige zentrale syntaktische Begriffe diskutiert.

1.1 DEF (Sprache der Arithmetik): Die PA wird in der formalen Sprache $\mathcal{L}_{\text{PA}}$ erster Stufe (mit $\bot, \wedge, \rightarrow, \forall, =$) formalisiert, die folgende nicht-logischen Zeichen im Alphabet hat:

(1) eine Individuenkonstante: 0

(2) ein einstelliges Funktionszeichen: S (*succesor/ Nachfolger*)

(3) drei zwei-stellige Funktionszeichen: $+, \cdot$ und $\uparrow$ (für die Exponentation).

Mit $\Sigma_{\text{PA}} := \{\bot, \wedge, \rightarrow, \forall, 0, S, +, \cdot, \uparrow, =, (,), x_0, x_1, \ldots\}$ wird das Alphabet der Sprache $\mathcal{L}_{\text{PA}}$bezeichnet.

1.2 DEF (Axiome der Arithmetik): Die formale Arithmetik (PA) besteht aus folgenden Axiomen und Axiomschemata:

Charakterisierung von 0 und Nachfolger-Funktion:

(P1) $\forall x : S(x) \neq 0$

(P2) $\forall x \forall y : S(x) = S(y) \rightarrow x = y$

Das Induktions-Schema: Für jede Formel $\phi \in \mathcal{L}_{\text{PA}}$ mit $\text{FV}(\phi) = \{x\}$:

(IS) $\phi(0) \wedge \forall x(\, \phi(x) \rightarrow \phi(S(x))\,) \rightarrow \forall x\, \phi(x)$

Rekursive Definitionsgleichungen für die Addition:

(A1) $\forall x : x + 0 = x$

(A2) $\forall x \forall y : x + S(y) = S(x + y)$

Rekursive Definitionsgleichungen für die Multiplikation:

(M1) $\forall x : x \cdot 0 = 0$

(M2) $\forall x \forall y : x \cdot S(y) = (x \cdot y) + x$

Rekursive Definitionsgleichungen für die Exponentation:

(E1) $\forall x : x \uparrow 0 = S(0)$

(E2) $\forall x \forall y : x \uparrow S(y) = (x \uparrow y) \cdot x$

1.3 DEF (Theorie PA): Die Theorie PA ist der deduktive Abschluß oben genannter Axiome samt des Induktionsschemas, also:

$$\mathrm{PA} := \mathrm{Ded}((P1), (P2), (IS), (A1) \dots (E2))$$

Bemerkung:

(1) Für eine Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ wurde der deduktive Abschluss wie folgt definiert:

$$\mathrm{Ded}(\Gamma) = \{\phi \in \mathcal{L} : \ \Gamma \vdash \phi \text{ und } \mathrm{FV}(\phi) = \varnothing\}$$

(2) Das Induktions-Schema (IS) ist für jede Einsetzung einer Formel $\phi \in \mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ mit der freien Variablen x ein eigenes Axiom; da es abzählbar-unendlich viele derartige Formeln in $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ gibt, ist die PA abzählbar-unendlich axiomatisiert.

Um dieses Schema durch ein einzelnes Axiom auszudrücken, wird Logik zweiter Stufe benötigt.

(3) Üblicherweise wird die PA ohne genuine Exponentation betrachtet. Hier wurde die Exponentation hinzugenommen, um später, bei der Repräsentation primitiv rekursiver Funktionen auf die Gödelsche β-Funktion verzichten zu können.

Im Jahr 1971 hat Matijasevich im Rahmen seiner (negativen) Lösung des 10. Hilbertschen Problems gezeigt, dass die Exponentation in der gewöhnlichen PA (nur mit $+$ und $\cdot$) definierbar ist. Dies ist ein weiteres Argument dafür, hier auf den technischen Aufwand zu verzichten und die Exponentation genuin zur Arithmetik hinzuzunehmen.

(4) Die uns vertrauten, natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit gewohnter Addition, Multiplikation und hier auch Exponentation sind das Standard-Modell der PA.

In $\mathbb{N}$ ist die Aussage ϕ_G gültig. Da die Prädikatenlogik erster Stufe semantisch vollständig ist, impliziert PA $\nvdash \phi_G$ die Existenz eines Modells $\mathfrak{M}$ von PA, in dem ϕ_G falsch ist. Ein solches Modell ist ein Nichtstandard-Modell von PA oder auch ein Nichtstandard-Modell der *formalen* Arithmetik.

Achtung: Wenn man ohne weitere Spezifikation von „Nichtstandard-Modellen" der Arithmetik spricht, meint man damit Modelle, in denen dieselben Aussagen wie in $\mathbb{N}$ gelten (die also zu $\mathbb{N}$ elementar-äquivalent sind), die aber nicht isomorph zu $\mathbb{N}$ sind. Die Existenz solcher (abzählbarer und überabzählbarer) Nichtstandard-Modelle der „wahren" Arithmetik folgt schon aus dem Kompaktheitssatz und den Sätzen von Löwenheim-Skolem.

1.4 Beispiel (Sätze der formalen Arithmetik): Die bekannten Rechenregeln der Arithmetik lassen sich formal aus den Axiomen der PA ableiten. Insbesondere soll hier erwähnt werden:

(1) *Kommutativität von Addition und Multiplikation:*

$\mathrm{PA} \vdash \forall xy : x + y = y + x$ und $\mathrm{PA} \vdash \forall xy : x \cdot y = y \cdot x$

(2) *Kürzungsregel für die Addition und Multiplikation:*

$\mathrm{PA} \vdash x + z = y + z \to x = y$ und $\mathrm{PA} \vdash x \cdot S(z) = y \cdot S(z) \to x = y$

(3) *Nichtexistenz von Zwischenzahlen:* $\mathrm{PA} \vdash \neg(x < y \wedge y < S(x))$

Dabei ist $x < y$ eine abkürzende Schreibweise für $\exists z : x + S(z) = y$.

Bew. (*Skizze*):

Beweise für derartige Aussagen erfolgen in einem Beweiskalkül; hier ist das der Kalkül des natürlichen Schließens.

Falls in der Mathematik die entsprechenden Aussagen der Arithmetik mit vollständiger Induktion bewiesen werden, wird bei einer formalen Ableitung das Induktions-Schema verwendet. Damit haben dann Beweise den folgenden Aufbau:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2\\ \phi(0) & \forall x : \psi(x)\end{array}}{\phi(0) \wedge \psi(x)} \qquad \phi(0) \wedge \forall x : \psi(x) \to \forall x \phi(x)}{\forall x\, \phi(x)}}{\phi(x)}$$

Dabei ist $\psi(x) \mathrel{\hat{=}} \phi(x) \to \phi(S(x))$ abkürzende Schreibweise für den Induktionsschritt, und $\phi \in \mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ eine geeignete Formel mit genau einer freien Variablen. So ist etwa im Beweis der Kommutativität der Addition $\phi(x) \mathrel{\hat{=}} \forall y : x + y = y + x$.

Die einzelnen Beweise (Ableitungen) verbleiben als Übungsaufgabe. Dabei kann es durchaus vorkommen, dass schon der Induktionsanfangs ($\mathrm{PA} \vdash \phi(0)$) durch eine eigene Induktion bewiesen werden muss.

- Zentrale syntaktische Begriffe -

Für die Unvollständigkeitssätze werden einige syntaktische Begriffe benötigt:

1.5 Wiederholung (Eigenschaften von Theorien): Sei $T \subseteq \mathcal{L}$ Theorie in einer beliebigen Sprache $\mathcal{L}$ erster Stufe.

(1) T ist *vollständig.*

$:\Leftrightarrow$ Für jede Aussage $\phi \in \mathcal{L}$ gilt: $T \nvdash \phi \;\Rightarrow T \vdash \neg\phi$.

(2) T ist *unvollständig.*

$:\Leftrightarrow$ Es gibt eine Aussage $\phi \in \mathcal{L}$ mit $T \nvdash \phi$ und $T \nvdash \neg\phi$.

(3) T ist *konsistent.*

$:\Leftrightarrow$ Es gibt keine Aussage $\phi \in \mathcal{L}$ mit $T \vdash \phi$ und $T \vdash \neg\phi$.

1.6 Notation (Darstellung der Zahlen in PA**):** Die (echten) natürlichen Zahlen können in der Arithmetik durch Terme repräsentiert werden. Wir schreiben für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\overline{n} :\simeq \dot{S}^n(\dot{0}) :\simeq \dot{S}(\ldots \dot{S}(\dot{0}))$$

In anderen Worten:

$$\overline{0} \simeq 0 \quad \text{und} \quad \overline{n+1} \simeq S(\overline{n})$$

Vgl. dazu auch unten, §4.

1.7 DEF (ω-Begriffe): Für arithmetische Theorien $T \subseteq \mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ können neben den oben wiederholten Eigenschaften weitere definiert werden, die von den natürlichen Zahlen abhängen:

(1) T heißt *ω-vollständig*, falls für jede Formel $\phi \in \mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ mit $\mathrm{FV}(\phi) = \{x\}$ gilt:
$T \vdash \exists x \phi(x). \quad \Rightarrow \quad$ Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit: $\; T \vdash \phi(\overline{n})$.

(2) T heißt *ω-konsistent*, falls es keine Formeln $\phi \in \mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ mit $\mathrm{FV}(\phi) = \{x\}$ gibt, so dass folgendes gilt:
$T \vdash \exists x \phi(x) \quad$ und für alle $n \in \mathbb{N}: \; T \vdash \neg\phi(\overline{n})$.

Bemerkungen: ω ist mengentheoretische Bezeichnung von $\mathbb{N}$ als Ordinalzahl (mit der natürlichen Ordnung). Damit verdeutlicht das Zeichen „ω" die Einschränkung der allgemeineren syntaktischen Begriffe auf den Standard-Bereich des Universums eines PA-Modells. In Nicht-Standard-Modellen der PA ist dies eine echte Teilmenge des Universums.

1.8 Proposition (ω-Konsistenz): Die ω-Konsistenz einer Theorie $T \subseteq \mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ impliziert schon ihre Konsistenz. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Beweis.

Ist T inkonsistent, folgt die ω-Inkonsistenz einfach mit der Falsum-Regel.

Q.E.D.

Bemerkung: Der Gödelsche Unvollständigkeitssatz liefert ein Gegenbeispiel zur Umkehrung der Aussage in obiger Proposition: ϕ_G hat die Form $\neg\exists x \psi(x)$, wobei für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathrm{PA} \vdash \psi(\overline{n})$$

$\mathrm{PA} \cup \{\neg\phi_G\}$ ist damit eine konsistente, aber nicht ω-konsistente Erweiterung der Arithmetik (vorausgesetzt, dass PA selbst konsistent ist).

- Alternativer Umgang mit der Unvollständigkeit -

Zum Abschluss dieses Abschnittes wird eine Erweiterung des Beweis-Kalküls vorgestellt. Betrachte dazu:

1.9 DEF (ω-Regel): Kann man für eine Formel $\phi(x) \in \mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ jede Einsetzung einer natürlichen Zahl (eventuell durch einen jeweils eigenen Beweis) ableiten, dann kann man schon auf die Allaussage $\forall x \phi(x)$ übergehen.

Im Kalkül NK kann diese infinitäre, auch „unendliche Induktion" genannte Regel wie folgt dargestellt werden:

$$\frac{\phi(0) \quad \phi(1) \quad \phi(2) \quad \ldots}{\forall x \phi(x)}$$

Bemerkung (ω-Regel): Die ω-Regel besagt, dass es ausreicht, den Standardteil des Universums zu betrachten, um die Wahrheit einer Allaussage festzustellen. Ersetzt man das Induktionsschema durch die ω-Regel, so ergibt sich eine vollständige Theorie. Dies wird erkauft durch einen Kalkülbegriff, der nicht mehr – wie normalerweise bei Kalkülen erwartet – endlich ist. Desweiteren ist dieser Kalkül in Bezug auf die Standardsemantik nicht mehr korrekt, da mehr Sätze bewiesen werden können als bisher.

§2 Primitive Rekursion und Kodierung

Primitiv-rekursive Funktionen und Relationen können in der PA repräsentiert werden; um also in der PA über die (informelle) Arithmetik reden zu können, müssen die Begriffe der Arithmetik geeignet kodiert werden, so dass dabei primitiv rekursive Funktionen und Relationen entstehen. In diesem Abschnitt werden dazu die notwendigen Grundlagen über Rekursion und Kodierung skizziert.

Voraussetzung (Rekursion): Primitiv-rekursive Funktionen und Relationen sind Inhalt der Vorlesung Informatik III und werden hier vorausgesetzt.

Vergleiche dazu etwa das Vorlesungsskript: FORMALE SPRACHEN UND BERECHENBARKEIT (INFORMATIK III), §12, Prof. Schroeder-Heister.[2]

2.1 DEF (Menge aller Primzahlen): $\mathbb{P} := \{p_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$ bezeichnet die natürlich angeordnete, abzählbar unendliche Menge aller Primzahlen. (Es gilt: $i < j \;\Rightarrow\; p_i < p_j$)

2.2 Rekursivität der Primzahlen: Folgende Prädikate und Funktionen sind primitiv rekursiv:

(1) *Teilbarkeit:* $m|n \quad :\Leftrightarrow \quad \exists(l \leq n) : (n = m \cdot l)$
(Die Zahl m teilt die Zahl n.)

(2) *Primzahl:* $Prim(m) \quad :\Leftrightarrow \quad 1 < m \ \wedge\ \forall(n < m) : (n|m \rightarrow n = 1)$
(Die Zahl m ist eine Primzahl.)

(3) *Nachbarprimzahlen:* $SuccPrim(n, m) \quad :\Leftrightarrow$
$n < m \wedge Prim(n) \wedge Prim(m) \wedge \forall\, l : (m < l < n \rightarrow \neg Prim(l))$
(Die Zahlen n und m sind aufeinanderfolgende Primzahlen.)

(4) *Primzahlfolge:*
$p_0 = 2 \quad$ und $\quad p_{n+1} = \mu z(z \leq p_n! + 1)(Prim(z) \wedge p_n < z)$
(p_n ist die n-te Primzahl.)

Bemerkungen:

(1) *Notation:* Prädikate $R \subseteq \mathbb{N}^n$ werden in diesem Skript *kursiv* gesetzt (etwa $Prim(m)$); die entsprechenden Formeln in der Sprache $\mathcal{L}_{\text{PA}}$ der Arithmetik in Normalschrift (etwa $\text{Prim}(x)$).

Ebenfalls werden in der Notation Variablen $n, m, \ldots$ für die Relationen bevorzugt; in der formalen Sprache wiederum $x, y, \ldots$

(2) *Charakterisierung der Primzahlen:* Die oben angegebene rekursive Definition der Primzahl-Folge wurde zunächst aus der Vorlesung FORMALE SPRACHEN UND BERECHENBARKEIT (INFORMATIK III) übernommen.

Später wird es notwendig, diese Folge anders zu definieren. An entsprechender Stelle wird erneut darauf hingewiesen.

[2] http://www-ls.informatik.uni-tuebingen.de/psh/lehre/materialien.html

2.3 DEF (Menge aller endlichen Folgen): $\mathbb{N}^{<\omega} := \bigcup\{\mathbb{N}^n;\ 0 \neq n \in \mathbb{N}\}$ bezeichnet die Menge aller endlichen Folgen von natürlichen Zahlen.

2.4 DEF (Kodierung endlicher Folgen): Die Kodierung $\langle\!\langle \cdot \rangle\!\rangle : \mathbb{N}^{<\omega} \to \mathbb{N}$ endlicher Folgen ist wie folgt definiert:

$$\vec{a} = \langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle \mapsto \langle\!\langle \vec{a} \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle \rangle\!\rangle := p_0^{a_0+1} \cdot p_1^{a_1+1} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n+1}$$

Bemerkungen:

(1) Die Kodierung $\langle\!\langle \cdot \rangle\!\rangle$ ist injektiv: Es gibt keine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, die Kodezahl von zwei verschiedenen Folgen $\vec{a}, \vec{b}$ ist. ($\vec{a} \neq \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \langle\!\langle \vec{a} \rangle\!\rangle \neq \langle\!\langle \vec{b} \rangle\!\rangle$)

(2) Die Kodierung $\langle\!\langle \cdot \rangle\!\rangle$ ist nicht surjektiv: Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist dann keine Kodezahl, wenn es zwei Primzahlen $p < q \in \mathbb{P}$ gibt, sodass zwar q die Zahl n teilt aber p nicht. (Betrachte etwa $10 = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1$).

(3) Um aus einer Kodezahl $n \in \mathbb{N}$ die kodierte Folge zu rekonstruieren, muss man n in seine Primfaktoren zerlegen und feststellen, mit welcher Potenz die einzelnen Primzahlen in n vorkommen und davon jeweils 1 abziehen. Dies ist möglich, da die Primfaktor-Zerlegung in den natürlichen Zahlen eindeutig und (primitiv rekursiv) berechenbar ist.

2.5 Satz (Rekursivität der Kodierung): Folgende Prädikate und Funktionen sind primitiv rekursiv:

(1) *Kodezahl:* $Seq(m) \quad :\Leftrightarrow$

$$m \neq 0 \wedge \forall (p, q \leq m) : \big(\mathrm{Prim}(p) \wedge \mathrm{Prim}(q) \wedge p \leq q \wedge q|m \to p|m\big)$$

(Die Zahl m ist Kodezahl/ Kode einer endlichen Folge.)

(2) *Länge einer Kodezahl:*

$$length(m) := \begin{cases} n & \text{falls } m = \langle \vec{a} \rangle \text{ für ein } \vec{a} \in \mathbb{N}^n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

($length(x)$ ist die Länge der durch m kodierten Folge $\vec{a}$.)

(3) *Dekodierung der k-ten Stelle:*

$$(m)_k := \begin{cases} a_k & \text{falls } m = \langle \vec{a} \rangle \text{ für ein } \vec{a} \in \mathbb{N}^n \text{ und } k < n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

($(m)_k$ ist das k-te Argument der durch m kodierten Folge $\vec{a}$.)

(4) *Konkatenation:* $\langle a_0, \dots a_n \rangle \circ \langle b_0, \dots b_m \rangle := \langle a_0, \dots a_n, b_0, \dots b_m \rangle$

Beweis. Verbleibt hier ohne Beweis. Q.E.D.

§3 Kodierung der Arithmetik

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie die (informelle) Arithmetik tatsächlich in rekursiven Begriffen kodiert wird. Damit werden die Objekte der Arithmetik (Zahlen, Formeln und Beweise) durch (eindeutige) Zahlen, mit denen man (ohne inhaltlichen Bezug) rechnen kann, beschrieben. (Traum von Leibniz!)

Die Kodierung der Arithmetik erfolgt durch die Gödel-Funktion $\ulcorner\cdot\urcorner$, die den einzelnen Objekten eine natürliche Zahl zuordnet. Der Kode $\ulcorner\xi\urcorner$ eines Objektes ξ wird auch Gödel-Zahl von ξ genannt; die Kodierung auch Gödelisierung.

3.1 DEF (Kodierung der Zeichen): Jedem Zeichen $\alpha \in \Sigma_{\text{PA}}$ des Alphabets von $\mathcal{L}_{\text{PA}}$ wird sein Kode $\ulcorner\alpha\urcorner$ nach folgender Tabelle zugeordnet:

α	$\perp$	$\wedge$	$\rightarrow$	$\forall$	0	S	$+$	$\cdot$	$\uparrow$	$=$	$($	$)$	x_n
$\ulcorner\alpha\urcorner$	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	p_{12+n}

Bemerkung: Anstatt die Zeichen fortlaufend mit allen natürlichen Zahlen zu nummerieren, weist der Kode jedem Zeichen die folgende Primzahl zu; dies ermöglicht später, die Term- und Formelstruktur der Sprache $\mathcal{L}_{\text{PA}}$ in die Kodierung aufzunehmen.

3.2 DEF (Kodierung der Terme): Die Terme der Sprache $\mathcal{L}_{\text{PA}}$ werden rekursiv über ihrem Aufbau (der Termstruktur entsprechend) kodiert:

(1) Individuen-Konstanten und Variablen: sind schon kodiert.

(2) n-stellige Funktionszeichen:

$$\ulcorner f(t_1,\dots,t_n)\urcorner \quad :\Leftrightarrow \quad \big\langle \langle \ulcorner f\urcorner, \ulcorner(\urcorner, \ulcorner t_1\urcorner,\dots,\ulcorner t_n\urcorner, \ulcorner)\urcorner\rangle \big\rangle$$

Bemerkung: Funktionen werden in unserer formalen Sprache prinzipiell in Präfix, mit Klammern und ohne Kommata notiert. Die gewohnten Schreibweisen dienen der Leseerleichterung; dementsprechend wird kodiert.

3.3 DEF (Kodierung der Formeln): Die Formeln der Sprache $\mathcal{L}_{\text{PA}}$ werden rekursiv über ihrem Aufbau (der Formelstruktur entsprechend) kodiert. Seien dabei t_1, t_2 beliebige Terme und $\phi, \psi \in \mathcal{L}_{\text{PA}}$ schon kodiert:

(1) Das $\perp$ ist schon codiert.

(2) $\ulcorner t_1 = t_2\urcorner := \big\langle \langle \ulcorner t_1\urcorner, \ulcorner=\urcorner, \ulcorner t_2\urcorner\rangle \big\rangle$

(3) $\ulcorner(\phi \wedge \psi)\urcorner := \big\langle \langle \ulcorner(\urcorner, \ulcorner\phi\urcorner, \ulcorner\wedge\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner, \ulcorner)\urcorner\rangle \big\rangle$

(4) $\ulcorner(\phi \rightarrow \psi)\urcorner := \big\langle \langle \ulcorner(\urcorner, \ulcorner\phi\urcorner, \ulcorner\rightarrow\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner, \ulcorner)\urcorner\rangle \big\rangle$

(5) $\ulcorner(\forall x_k\, \phi)\urcorner := \big\langle \langle \ulcorner(\urcorner, \ulcorner\forall\urcorner, \ulcorner x_k\urcorner, \ulcorner\phi\urcorner, \ulcorner)\urcorner\rangle \big\rangle$

Bemerkung: In der Sprache $\mathcal{L}_{\text{PA}}$ kommen keine Relationszeichen vor; entsprechend müssen diese auch nicht kodiert werden.

Beispiel (Kodierung einer Formel): Am Beispiel $\phi :\simeq\ 0 = S(0)\ \in \mathcal{L}_{\text{PA}}$ wird die Kodierung illustriert:

$$\ulcorner \phi \urcorner = \langle\!\langle \ulcorner 0 \urcorner, \ulcorner = \urcorner, \ulcorner S(0) \urcorner \rangle\!\rangle = 2^{11+1} \cdot 3^{29+1} \cdot 5^{\ulcorner S(0) \urcorner + 1}$$

Dabei ist:

$$\ulcorner S(0) \urcorner = \langle\!\langle \ulcorner S \urcorner, \ulcorner (\urcorner, \ulcorner 0 \urcorner, \ulcorner) \urcorner \rangle\!\rangle = 2^{13+1} \cdot 3^{31+1} \cdot 5^{11+1} \cdot 7^{37+1}$$

Im Folgenden wird skizziert, wie die üblichen Begriffe der Logik durch primitiv rekursive Funktionen und Prädikate ausgedrückt werden können.

3.4 DEF (Prädikate für das Alphabet): Folgende primitiv rekursiven Prädikate bestimmen den Typ eines codierten Zeichens:

(1) $Const(n)\ :\Leftrightarrow\ n = \ulcorner 0 \urcorner = 11$
(*n* ist Kodezahl einer Individuen-Konstante.)

(2) $Var(n)\ :\Leftrightarrow\ \exists k < n : (n = p_{k+12})$
(*n* ist Kodezahl einer Variablen.)

(3) $Fn1(n)\ :\Leftrightarrow\ n = \ulcorner S \urcorner = 13$
(*n* ist Kodezahl eines einstelligen Funktionszeichens.)

(4) $Fn2(n)\ :\Leftrightarrow\ n = \ulcorner + \urcorner \vee n = \ulcorner \cdot \urcorner \vee n = \ulcorner \uparrow \urcorner$
(*n* ist Kodezahl eines zweistelligen Funktionszeichens.)

(5) $Fn(n) :\Leftrightarrow\ Fn1(n) \vee Fn2(n)$
(*n* ist Kodezahl eines Funktionszeichens.)

3.5 Proposition: Die Prädikate für das Alphabet leisten das Gewünschte.

Beweis. Offensichtlich, da die Kodezahlen nach Tabelle verwendet werden.

Q.E.D.

Mit obigen Prädikaten lassen sich dann sukzessive die höheren Prädikate und Funktionen für die Sprache $\mathcal{L}_{\text{PA}}$ durch primitiv rekursive Funktionen und Prädikaten ausdrücken.

3.6 DEF (Höhere Begriffe): Folgende primitiv rekursive Prädikate und Funktionen drücken höhere syntaktische Begriffe aus:

(1) $$\begin{aligned} Term(n)\ :\Leftrightarrow\ & Const(n)\ \vee\ Var(n) \\ & \vee \big(\ Seq(n) \wedge\ length(n) = 4\ \wedge \\ & \quad Fn1((n)_0)\ \wedge\ (n)_1 = \ulcorner (\urcorner\ \wedge\ Term((n)_2)\ \wedge\ (n)_3 = \ulcorner) \urcorner \big) \\ & \vee \big(\ Seq(n) \wedge\ length(n) = 5\ \wedge \\ & \quad Fn2((n)_0) \wedge (n)_1 = \ulcorner (\urcorner \wedge Term((n)_2) \wedge Term((n)_3) \wedge (n)_4 = \ulcorner) \urcorner \big) \end{aligned}$$
(Die Zahl *n* ist Kodezahl eines Terms.)

Analog kann definiert werden:

(2) $Form(n)$
(Die Zahl n ist Kodezahl einer Formel.)

(3) $Axiom(n)$
(Die Zahl n ist Kodezahl eines der Axiome von PA.)

(4) $Free(n, m)$
(Die Zahl n ist Kodezahl einer freien Variable in einem Term t mit Kodezahl $\ulcorner t \urcorner = m$ oder einer Formel ϕ mit Kodezahl $\ulcorner \phi \urcorner = m$.)

(5) $Sub(n, m, l)$
(Falls $n = \ulcorner \phi \urcorner$ für eine Formel ϕ, $m = \ulcorner t \urcorner$ für einen Term t ist und $l = \ulcorner x_k \urcorner$ für eine Variable x_k ist, dann ist $Sub(n, m, l) = \ulcorner \phi[t/x_k] \urcorner$.)

Bemerkung: Für eine exakte Definition der Ausdrücke siehe etwa van Dalen, S.246ff.

3.7 Proposition: Die als höhere Begriffe definierten Prädikate und Funktionen leisten das Gewünschte. Es gilt also:

(1) $Term(n) \quad \Leftrightarrow \quad n = \ulcorner t \urcorner$ für einen Term t.

(2) $Form(n) \quad \Leftrightarrow \quad n = \ulcorner \phi \urcorner$ für eine Formel ϕ.

(3) $Axiom(n) \quad \Leftrightarrow \quad n = \ulcorner \phi \urcorner$ für eine Axiom ϕ der PA.

(4) $Free(n, m) \quad \Leftrightarrow \quad n = \ulcorner x_k \urcorner$ für eine Variable x_k und $m = \ulcorner t \urcorner$ für einen Term t oder $m = \ulcorner \phi \urcorner$ für eine Formel ϕ und x_k ist frei in t oder in ϕ.

(5) $Sub(n, m, l) = p \quad \Leftrightarrow \quad n = \ulcorner \phi \urcorner$ für einen Formel ϕ, $m = \ulcorner x_k \urcorner$ für eine Variable x_k, $l = \ulcorner t \urcorner$ für einen Term t und $p = \ulcorner \phi[t/x_k] \urcorner$.

Beweis. Verbleibt hier ohne Beweis. Q.E.D.

3.8 DEF (Kodierung von Ableitungen): Ableitungen werden ebenfalls rekursiv, dem Aufbau der Abbleitungen entsprechend, kodiert. Zusätzlich werden in der kodierenden Folge weitere Informationen über die verwendete Regel mitkodiert. Die kodierende Folge ist wie folgt aufgebaut:

(1) An 0-ter Stelle wird die Art der verwendeten Regel, mit der die Ableitung (im letzten Schritt) entsteht, kodiert: Eine Annahme wird dabei mit 0 kodiert, Schlussregeln mit einem geordneten Paar von Zahlen. In diesem Paar steht zuerst, ob die angewandte Regel eine Einführungs-Regel (0) oder eine Beseitigungs-Regel (1) ist; an nächster Stelle wird der zugehörige Junktor als Zeichen kodiert.

(2) An den folgenden Stellen werden die bisherigen Teil-Ableitungen, aus denen die Ableitung entsteht, kodiert.

(3) An letzter Stelle wird die Konklusion der Ableitung kodiert.

Beispiel (Kodierung von Ableitungen): Folgende Beispiele sollen die Kodierung von Ableitungen verdeutlichen:

(1) Sei $\mathcal{D}$ die Einführung der Annahme ϕ: $\mathcal{D} :\triangleq \phi$

$\ulcorner \mathcal{D} \urcorner := \langle 0, \ulcorner \phi \urcorner \rangle$

(2) Sei $\mathcal{D}$ der Form: $\mathcal{D} :\triangleq \dfrac{\begin{matrix} \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ \phi & \psi \end{matrix}}{\phi \wedge \psi}.$

$\ulcorner \mathcal{D} \urcorner := \langle \langle 0, \ulcorner \wedge \urcorner \rangle, \ulcorner \mathcal{D}_1 \urcorner, \ulcorner \mathcal{D}_2 \urcorner, \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner \rangle$

(3) Die verbleibenden Ableitungen werden analog kodiert.

Anmerkung: Hier muss noch die Hypothesen-Menge einer Ableitung eingeführt werden; dies geschieht analog zu van Dalen.

3.9 DEF (Prädikate für Ableitungen): Wie schon bei den Termen und Formeln werden die benötigten Begriffe durch primitiv rekursive Funktionen und Prädikate ausgedrückt.

Schließlich kann man das für die Unvollständigkeitssätze zentrale, primitiv rekursive Prädikat $Prov(n, m)$ definieren, das wahr ist, falls n Kodezahl einer Ableitung $\mathcal{D}$ ist, m Kodezahl einer Formel ϕ und die Ableitung $\mathcal{D}$ die Formel ϕ (unter Verwendung der Axiome der PA) beweist. Es gilt also:

$Prov(n, m) \quad :\Leftrightarrow$

$$n = \ulcorner \begin{matrix} \phi_1, \ldots, \phi_k \\ \mathcal{D} \\ \phi \end{matrix} \urcorner, \; m = \ulcorner \phi \urcorner, \; Axiom(\ulcorner \phi_l \urcorner) \quad \text{für } 1 \leq l \leq k$$

3.10 Proposition: Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt: $Prov(n, m) \Leftrightarrow n = \ulcorner \mathcal{D} \urcorner$ für eine Ableitung $\mathcal{D}$, $m = \ulcorner \phi \urcorner$ für eine Formel ϕ und die Ableitung $\mathcal{D}$ ist ein Beweis für die Formel ϕ in der PA. Also: PA $\vdash \phi$.

Beweis. Der technisch aufwendige Beweis wird hier weggelassen. Q.E.D.

§4 Repräsentation von Zahlen

Repräsentation mathematischer Obejekte in der PA bedeutet, dass man Formeln $\phi \in \mathcal{L}_{\text{PA}}$ findet, die sich analog zu den Objekten verhalten. In diesem Abschnitt wird die Repräsentation der natürlichen Zahlen behandelt und einige Aussagen über Formeln mit Zahlen getroffen.

Die Repräsentation einer Zahl n in der PA wird durch $\overline{n}$ gekennzeichnet.

Erinnerung (Repräsentation von Zahlen): Die Repräsentation der natürlichen Zahl in der formalen Arithmetik wurde rekursiv definiert:

$$\overline{\cdot} : \mathbb{N} \to \mathcal{L}_{\text{PA}} : n \mapsto \overline{n} \simeq \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ S(\overline{m}) & \text{falls } n = m+1 \end{cases}$$

4.1 Proposition (Verträglichkeit mit den Verknüpfungen): Die Repräsentation der Zahlen verträgt sich mit den einzelnen Verknüpfungen. Das bedeutet für alle $n, m \in \mathbb{N}$:

(1) $\text{PA} \vdash \overline{n} + \overline{m} = \overline{n+m}$

(2) $\text{PA} \vdash \overline{n} \cdot \overline{m} = \overline{n \cdot m}$

(3) $\text{PA} \vdash \overline{n} \uparrow \overline{m} = \overline{n \uparrow m}$

Beweis.

Durch vollständige Induktion über m, hier nur die Addition:

$m = 0$: Mit $n + 0 = n$ und $\overline{0} \simeq 0$ triviale Anwendung von (A1).

IV: Es gelte $\text{PA} \vdash \overline{n} + \overline{m} = \overline{n+m}$

$m+1$: Mit (A2) gilt: $\text{PA} \vdash \overline{n} + S(\overline{m}) = S(\overline{n} + \overline{m})$

Mit IV und Substitutivität gilt: $\text{PA} \vdash \overline{n} + S(\overline{m}) = S(\overline{n+m})$

Also: $\text{PA} \vdash \overline{n} + \overline{m+1} = \overline{n+m+1}$

Q.E.D.

4.2 Proposition (Auswertung geschlossener Terme): Zu jedem geschlossenen[3] Term t der Sprache $\mathcal{L}_{\text{PA}}$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass folgendes gilt: $\text{PA} \vdash t = \overline{n}$.

Beweis. Zeige durch Induktion über dem Termaufbau die Behauptung.

$t :\simeq 0$: Es gilt: $\text{PA} \vdash 0 = \overline{0}$

IV: $\text{PA} \vdash t = \overline{n}$ und $\text{PA} \vdash s = \overline{m}$ für $n, m \in \mathbb{N}$.

$S(t)$: Aus der IV folgt mit Substitutivität: $\text{PA} \vdash S(t) = S(\overline{n})$

Also: $\text{PA} \vdash S(t) = \overline{l}$ für $l = n + 1 \in \mathbb{N}$.

[3] Ein Term t heißt geschlossen, falls keine Variablen in t vorkommen; ansonsten ist t offen.

$t + s$: Aus der IV folgt mit Substitutivität: $\mathrm{PA} \vdash t + s = \overline{n} + \overline{m}$

Mit obiger Proposition folgt: $\mathrm{PA} \vdash t + s = \overline{n + m}$

Also: $\mathrm{PA} \vdash t + s = \overline{l}$ für $l = n + m \in \mathbb{N}$.

$t \cdot s$ und $t \uparrow s$: Werden analog zu $t + s$ gezeigt.

Q.E.D.

4.3 Korollar (Vollständigkeit für atomare Aussagen): Im Standard-Modell $\mathbb{N}$ der PA gilt für alle geschlossenen Terme t, s:

$$\mathbb{N} \models t = s \quad \Rightarrow \quad \mathrm{PA} \vdash t = s$$

Beweis. Hier ohne Beweis. Q.E.D.

4.4 DEF (Klassifikation von Formeln): Formeln $\phi \in \mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ können nach dem Vorkommen von Quantoren klassifiziert werden:

(1) ϕ ist eine Δ_0-Formel, falls in ϕ höchstens beschränkte Quantoren vorkommen.

(2) ϕ ist eine Σ_1-Formel, falls $\phi \doteq \langle \exists x_k \rangle \psi$ ist. Dabei ist $\langle \exists x_k \rangle$ ein beliebig langer Block beliebiger (und unbeschränkter) Existenz-Quantoren und ψ eine Δ_0-Formel.

(3) ϕ ist eine $\Sigma_1^\star$-Formeln, falls ϕ eine Σ_1-Formel ist und der Block der Existenz-Quantoren die Länge 1 hat.

Diese Formeln werden auch strikte Σ_1-Formeln genannt.

4.5 Proposition (Vollständigkeit für Δ_0-Aussagen): Für jede Δ_0-Aussage $\phi \in \mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ gilt:

$$\mathrm{PA} \vdash \phi \quad \text{oder} \quad \mathrm{PA} \vdash \neg\phi$$

Beweis. Durch vollständige Induktion über dem Aufbau von Formeln.

ϕ atomar: Für $\phi \doteq \bot$ gilt: $\mathrm{PA} \vdash \neg\bot$. Sei also $\phi :\doteq t = s$ für zwei Terme.

1. Fall ($\mathbb{N} \models t = s$): Mit Korollar 4.3 gilt: $\mathrm{PA} \vdash t = s$

2. Fall ($\mathbb{N} \not\models t = s$): Es gibt natürliche Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ mit:

$$\mathbb{N} \models t = \overline{n} \quad \text{und} \quad \mathbb{N} \models s = \overline{m} \quad \text{und} \quad n \neq m$$

Ohne Einschränkung ist $m < n$. Also $m + (k + 1) = n$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Mit Fall 1 gilt:

$$\mathrm{PA} \vdash t = \overline{n} \quad \text{und} \quad \mathrm{PA} \vdash s = \overline{m} \quad \text{und} \quad \mathrm{PA} \vdash \overline{m} + S(\overline{k}) = \overline{n}$$

Betrachte folgende (verkürzt dargestellte) Ableitung:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[t = s]^1}{\overline{n} = \overline{m}}}{\overline{m} + S(\overline{k}) = \overline{m}+0}}{S(\overline{k}) = 0} \qquad \dfrac{(\mathrm{P1})}{S(\overline{k}) \neq 0}}{\dfrac{\perp}{t \neq s}\;(1)}$$

Also: $\mathrm{PA} \vdash t \neq s$

ϕ ist AL-Zusammensetzung: trivial.

ϕ wird quantifiziert: Es muss nur beschränkte Quantifikation betrachtet werden. Diese Formeln sind logisch äquivalent zu endlichen AL-Kombinationen quantorenfreier Formeln mit geschlossenen Termen.

Q.E.D.

Bemerkungen:

(1) In den Beweis ging die Hilfsbehauptung aus Proposition 4.1 sowie einige weitere Rechenregeln (etwa Kürzungsregel) ein.

(2) Insbesondere wurde die beschränkte Quantifikation auf die Aussagenlogik zurückgeführt.

4.6 Proposition (Vollständigkeit für Σ_1-Aussagen): Für jede Σ_1-Aussage $\psi \in \mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ gilt:

$$\mathbb{N} \models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{PA} \vdash \psi$$

Beweis.

„$\Leftarrow$“ $\mathbb{N}$ ist ein Modell der PA.

„$\Rightarrow$“ Die Behauptung ist für Δ_0-Aussagen mit Proposition 4.5 einfach zu zeigen.

Sei nun ψ Σ_1-Aussage. Ohne Einschränkung ist ψ strikt Σ_1.[4]

Also: $\psi :\simeq \exists x \phi(x)$ mit einer Δ_0-Formel ϕ. Damit:

$\mathbb{N} \models \exists x \phi(x)$

$\Rightarrow$ (Auswertung von Formeln): Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit: $\mathbb{N} \models \phi(\overline{n})$

$\Rightarrow$ ($\phi(\overline{n})$ ist Δ_0-Aussage): $\mathrm{PA} \vdash \phi(\overline{n})$ für ein $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $\mathrm{PA} \vdash \exists x \phi(x)$.

Q.E.D.

[4] Übungsaufgabe.

Bemerkung: In semantischen Kontexten, in denen über das Standardmodell $\mathbb{N}$ gesprochen wird, wird die Konsistenz der PA immer präsupponiert und muss deshalb nicht eigens zur Voraussetzung gemacht werden. Dies ist (später) beim Gödelschen Unvollständigkeitssatz, der rein syntaktisch erfolgt, anders; dort muss die Konsistenz als Voraussetzung gefordert werden.

4.7 Korollar (ω-Konsistenz für Δ_0-Formeln): Falls die PA konsistent ist, gilt für alle Δ_0-Formeln $\phi \in \mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ (mit $\mathrm{Fr}(\phi) = \{x\}$) ω-Konsistenz.

Beweis. Sei ϕ eine Δ_0-Formel, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathrm{PA} \vdash \neg\phi(\overline{n})$.

$\Rightarrow$ Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathbb{N} \models \neg\phi(\overline{n})$

$\Rightarrow$ (Auswertung von Formeln in Strukturen): $\mathbb{N} \models \forall x \neg\phi(x)$

$\Rightarrow$ $\mathbb{N} \not\models \neg\forall x \neg\phi(x) \ \simeq\ \exists x \phi(x)$

$\Rightarrow$ $\mathrm{PA} \nvdash \exists x \phi(x)$ (da $\phi(x) \in \Delta_0$, also $\exists x \phi(x) \in \Sigma_1^\star$)

Q.E.D.

§5 Repräsentation von Funktionen und Prädikaten

In diesem Abschnitt wird die Repräsentation von (primitiv rekursiven) Funktionen und Prädikaten in der Arithmetik besprochen.

Zunächst wird geklärt, was in diesem Zusammenhang Repräsentation bedeutet. Anschließend wird gezeigt, dass die primitiv rekursiven Funktionen und Prädikate repräsentiert werden können. Nachdem die informelle Arithmetik schon in Begriffen der primitiven Rekursion kodiert wurde, ist es damit gelungen, diese in der formalen Arithmetik zu repräsentieren.

Für Funktionen, die in der formalen Sprache $\mathcal{L}_{\text{PA}}$ repräsentiert werden sollen, ist eine ziffernweise Repräsentation durch einem Term ausreichend.

5.1 DEF (Term-Repräsentation von Funktionen): Ein Term t_f mit $\text{FV}(t) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$ repräsentiert eine k-stellige Funtion f, falls für alle Tupel $\vec{n} \in \mathbb{N}^k$ gilt:

$$\text{PA} \vdash t_f(\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k) = \overline{f(n_1, \ldots, n_k)}$$

Bemerkungen:

(1) Dabei ist: $t_f(\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k) :\simeq t_f[\overline{n}_1/x_1, \ldots, \overline{n}_k/x_k]$.

Es wird dabei explizit nicht vorausgesetzt, dass tatsächlich alle Variablen x_i im Term t_f vorkommen.

(2) Bei vielen Funktionen – wie etwa der Signums-Funktion – ist eine derartige Repräsentation nicht möglich. Statt dessen kann eine Funktion auch durch eine Formel ϕ_f repräsentiert werden.

5.2 DEF (Formel-Repräsentation von Funktionen): Eine Formel ϕ_f mit $\text{FV}(\phi) \subseteq \{x_0, \ldots, x_k\}$ repräsentiert eine k-stellige Funtion f, falls für alle Tupel $\vec{n} \in \mathbb{N}^k$ gilt:

(1) *Existenz*: $\text{PA} \vdash \phi_f(\overline{f(n1, \ldots, n_k)}, \overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k)$

(2) *Rechtseindeutigkeit*: $\text{PA} \vdash \phi_f(y, \overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k) \rightarrow y = \overline{f(n_1, \ldots, n_k)}$

Bemerkung: Beide Bedingungen lassen sich auch in einer einzigen Formel zusammenfassen:

$$\text{PA} \vdash \phi_f(y, \overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k) \leftrightarrow y = \overline{f(n_1, \ldots, n_k)}$$

5.3 Proposition (Term- und Formel-Repräsentation): Falls eine Funktion durch einen Term repräsentiert werden kann, dann kann sie auch durch eine Formel repräsentiert werden.

Beweis. Sei eine Funktion f durch einen Term t_f repräsentiert. Dann repräsentiert $\phi_f :\simeq t_f = x_0$ die Funktion f als Formel. Q.E.D.

5.4 DEF (Repräsentation von Prädikaten): Eine Formel ϕ_P repräsentiert ein k-stelliges Prädikat P, falls für alle Tupel $\vec{n} \in \mathbb{N}^k$ gilt:

(1) $\langle n_1, \ldots, n_k \rangle \in P \quad \Rightarrow \quad \mathrm{PA} \vdash \phi_P(\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k)$

(2) $\langle n_1, \ldots, n_k \rangle \notin P \quad \Rightarrow \quad \mathrm{PA} \vdash \neg\phi_P(\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k)$

5.5 Proposition (Repräsentierbarkeit von Prädikaten): Ein Prädikat P ist genau dann repräsentierbar, wenn die charakteristische Funktion χ_P des Prädikates P repräsentierbar ist.

Beweis. Hier ohne Beweis. Vgl. van Dalen Q.E.D.

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass alle primitiv-rekursiven Funktionen und Prädikate in der PA repräsentierbar sind. Da die charakteristische Funktion eines primitiv rekursiven Prädikats nach Definition primitiv rekursiv ist, genügt es mit obiger Proposition, dieses lediglich für primitiv-rekursive Funktionen zu zeigen. Dies geschieht mithilfe einiger Hilfssätze:

5.6 Hilfssatz (Anfangsfunktionen): Die Anfangsfunktionen sind repräsentierbar:

Beweis. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt:

(1) N (*Nachfolge-Funktion*): $t_N(x_1) :\simeq S(x_1)$

(2) C_k (*k-stellige Null-Funktion*): $t_{C_k}(\vec{x}) :\simeq 0$

(3) U_k^i (*k-stellige Projektion der i-ten Stelle*): $t_{U_k^i}(\vec{x}) :\simeq x_i$

Es gilt: $t_{U_k^i}(\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k) \simeq \overline{n}_i$

Daraus folgt: $\mathrm{PA} \vdash x_i(\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k) = \overline{n}_i$

Damit sind alle Anfangsfunktionen durch Terme repräsentierbar. Q.E.D.

5.7 Hilfssatz (Komposition): Funktionen, die durch Komposition repräsentierbarer Funktionen entstehen, sind repräsentierbar.

Beweis.

Sei g eine m-stellige Funktion, die durch ϕ_g repräsentiert wird, seien h_i alles k-stellige Funktionen, die durch ψ_i repräsentiert werden $(1 \leq i \leq m)$.

Das bedeutet:

(1) $g(p_1, \ldots, p_m) = q \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{PA} \vdash \phi_g(\overline{q}, \overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_m) \\ \mathrm{PA} \vdash \phi_g(y, \overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_m) \to y = \overline{q} \end{cases}$

(2) für jedes $1 \leq i \leq m$:

$h_i(n_1, \ldots, n_k) = l_i \quad \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{PA} \vdash \psi_i(\overline{l_i}, \overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k) \\ \mathrm{PA} \vdash \psi_i(y, \overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k) \to y = \overline{l_i} \end{cases}$

Sei nun $f(\vec{n}) := g(h_1(\vec{n}), \ldots h_m(\vec{n})) = r$.

Betrachte folgende Formel (mit neuen Variablen $y_1, \ldots, y_k$):

$\sigma(x_0, x_1, \ldots, x_k) :\mathrel{\hat=}$

$$\exists y_1 \ldots y_m \big(\psi_1(y_1, x_1, \ldots, x_k)) \wedge \ldots \wedge \psi_m(y_m, x_1, \ldots, x_k) \wedge \phi_g(x_0, \vec{y})\big)$$

Damit ist: $\sigma(\overline{r}, \overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k) \mathrel{\hat=}$

$$\exists y_1 \ldots y_m \big(\psi_1(y_1, \overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k)) \wedge \ldots \wedge \psi_m(y_m, \overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k) \wedge \phi_g(\overline{r}, \vec{y})\big)$$

Man kann zeigen: $\begin{cases} \mathrm{PA} \vdash \sigma(\overline{r}, \overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k) \\ \mathrm{PA} \vdash \sigma(y, \overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k) \rightarrow y = \overline{r} \end{cases}$

Damit ist die Komposition repräsentierbar. Q.E.D.

Bemerkung: Für die Repräsentierbarkeit der primitiven Rekursion wird die Repräsentierbarkeit der Dekodierung in der Sprache $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ benötigt. Diese benötigt ihrerseits unverzichtbar die Repräsentierbarkeit der Primzahlfolge; dafür kann nicht auf die bekannte Definition der Primzahlfolge zurückgegriffen werden; diese verwendet nämlich primitive Rekursion, die hier eben noch nicht repräsentiert ist.

Deshalb werden zuerst einige einfache Prädikate repräsentiert. Mit deren Hife gelingt es dann, *geeignete Zahlen* zu definieren und zu repräsentieren. Mit diesen geeigneten Zahlen kann die Primzahlfoge auch ohne Rekursion definiert und repräsentiert werden.

Zur Definition der *geeigneten Zahlen* wird die Hinzunahme der Exponentation zur Sprache $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ wesentlich benötigt; diese Zahlen wären ohne Exponentation nicht definierbar.

5.8 Hilfssatz (Einfache Prädikate): Folgende Prädikate sind in $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ repräsentierbar.

$$n < m,\ n \leq m,\ n|m,\ \mathrm{Prim}(n),\ \mathit{SuccPrim}(n, m),\ \mathit{Seq}(n)$$

Beweis. Betrachte folgende Formeln:

(1) $x < y :\mathrel{\hat=} \phi_<(x, y) :\mathrel{\hat=} \exists z : x + S(z) = y$

(2) $x \leq y :\mathrel{\hat=} \phi_\leq(x, y) :\mathrel{\hat=} x = y \vee x < y$

(3) $x|y :\mathrel{\hat=} \phi_|(x, y) :\mathrel{\hat=} \exists z : x \cdot S(z) = y$

(4) $\mathrm{Prim}(x) :\mathrel{\hat=} \phi_{\mathrm{Prim}}(x) :\mathrel{\hat=} \forall z (z|y \rightarrow z = S(0) \vee z = x)$

(5) $\mathrm{SuccPrim}(x, y) :\mathrel{\hat=} \phi_{\mathrm{SuccPrim}}(x, y) :\mathrel{\hat=}$
$(\mathrm{Prim}(x) \wedge \mathrm{Prim}(y) \wedge \forall z (x < z \wedge z < y \rightarrow \neg\, \mathrm{Prim}(z)))$

(6) $\phi_{Seq}(x)$ analog; vgl Definition von *Seq*. Q.E.D.

Bemerkungen:

(1) Ganz links werden abkürzende Schreibweisen definiert, die das Lesen der Formeln erleichtern sollen; die mittlere Formel soll an den repräsentierenden Charakter der Formeln erinnern.

(2) Die unbeschränkten Quantoren in den einzelnen repräsentierenden Formeln können (außer bei $\phi_<$) durch beschränkte Quantoren ersetzt werden. Dies wird benötigt, wenn man feststellt, dass die Repräsentation der primitiv rekursiven Funktionen und Prädikate strikt Σ_1 ist; insofern aber die beschränkte Quantifikation garantiert, dass aus primitiv rekursiven Funktionen erneut primitiv rekursive entstehen, ist die Beschränkung hier unwichtig. Repräsentierende Formeln müssen keiner Primitivitäts-Bedingung gehorchen.

5.9 Hilfssatz (Dekodierung): Die Dekodierung $(x)_n$ ist repräsentierbar.

Bew. (*Skizze*): Die Behauptung wird in mehreren Schritten skiziert:

(1) *Geeignete Zahlen*: Zur Definition der Primzahlfolge werden geeignete Zahlen benötigt. Eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ heißt dabei geeignet, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit:

$$m = \prod_{k=0}^{n} p_k^k = 2^0 \cdot 3^1 \cdot \ldots p_n^n$$

Formal:

$$Geeig(m) \quad :\Leftrightarrow \quad (2 \not| m) \wedge$$
$$\forall x \forall y \forall z : \big(SuccPrim(x,y) \ \wedge \ x^z | m \ \wedge \ x^{S(z)} \not| m$$
$$\rightarrow ((y^{S(z)} | m \wedge y^{S(S(z))} \not| m) \ \vee \ \forall w \geq y (Prim(w) \rightarrow w \not| m))\big)$$

Das Prädikat $Geeig(m)$ kann (offensichtlich) mit den (um die Exponentation erweiterten) Mitteln der PA ausgedrückt werden.

Dabei wird zwar die Primzahl-Eigenschaft einer Zahl verwendet, nicht aber die Primzahlfolge selbst.

Die repräsentierende Formel wird mit $\phi_{\text{geeig}}(x)$ bezeichnet.

(2) *Folge der geigneten Zahlen*: Die Folge der geeigneten Zahlen kann in $\mathcal{L}_{\text{PA}}$ repräsentiert werden. Betrachte dazu:

$$\phi_{\text{g-Folge}}(y,x) :\simeq (x = \overline{0} \wedge y = \overline{1}) \vee \big(\phi_{geeig}(y) \wedge$$
$$\exists z : (\text{Prim}(z) \ \wedge \ z^x | y \ \wedge \ z^{S(x)} \not| y \ \wedge \ \forall w > z : (\text{Prim}(w) \rightarrow w \not| y))\big)$$

$\phi_{g-Folge}(y,x)$ repräsentiert die Folge (Funktion), die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ die n-te geeignete Zahl zuordnet.

(3) *Folge der Primzahlen*: Die Folge der Primzahlen kann in $\mathcal{L}_{\text{PA}}$ repräsentiert werden. Betrachte dazu:

$$\phi(y,x) :\simeq (x = \overline{0} \wedge y = \overline{2}) \vee$$
$$\exists z : (\phi_{\text{g-Folge}}(z,x) \ \wedge \ \text{Prim}(y) \ \wedge \ y^x | z \ \wedge \ y^{S(x)} \not| z)$$

$\phi(y,x)$ repräsentiert die Folge (Funktion), die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ die n-te Primzahl zuordnet.

(4) Damit stehen alle Mittel zur Verfügung, um die Dekodierung in der Sprache $\mathcal{L}_{\text{PA}}$ zu repräsentieren.

Q.E.D.

5.10 Hilfssatz (Rekursion): Funktionen, die durch primitive Rekursion aus repräsentierbaren Funktionen entstehen, sind repräsentierbar.

Beweis.

Sei g eine k-stellige Funktion, die durch ϕ_g repräsentiert wird, und h eine $(k+2)$-stellige Funktion, die durch ϕ_h repräsentiert wird.

Das bedeutet:

$$(1) \quad g(\vec{n}) = m \;\Rightarrow\; \begin{cases} \text{PA} \vdash \phi_g(\overline{m}, \overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k) \\ \text{PA} \vdash \phi_g(y, \overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k) \to y = \overline{m} \end{cases}$$

$$(2) \quad h(\vec{n}, p, q) = m \;\Rightarrow\; \begin{cases} \text{PA} \vdash \phi_h(\overline{m}, \overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k, \overline{p}, \overline{q}) \\ \text{PA} \vdash \phi_h(y, \overline{m}, \overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k, \overline{p}, \overline{q}) \to y = \overline{m} \end{cases}$$

Sei nun $f(\vec{n}, p)$ mit: $\begin{cases} f(\vec{n}, 0) = g(\vec{n}) \\ f(\vec{n}, N(p)) = h(\vec{n}, m, f(\vec{n}, p)) \end{cases}$

Der Repräsentation der primitiven Rekursion gelingt dadurch, dass man die Existenz einer Kodezahl postuliert, in der zu jedem $n \in \mathbb{N}$ alle vorhergehenden Funktionswerte der Funktion kodiert sind.

Es gelte also $f(\vec{n}, p) = m$ für ein $p \in \mathbb{N}$. Um m berechnen zu können, muss man (per Rekursion) alle vorhergehenden Funktionswerte $f(\vec{n}, < p)$ berechnet haben. Ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} a_0 &:= f(\vec{n}, 0) = g(\vec{n}) \\ a_1 &:= f(\vec{n}, 1) = h(\vec{n}, 0, f(\vec{n}, 0)) \\ &\;\;\vdots \\ a_p &:= f(\vec{n}, p) = h(\vec{n}, p-1, f(\vec{n}, p-1)) = m \end{aligned}$$

Die a_k $(0 \leq k \leq p)$ bilden eine endliche Folge: $\vec{a} := \langle a_0, \ldots, a_p \rangle$

Diese Folge kann kodiert werden. Setze $w := \langle \vec{a} \rangle \in \mathbb{N}$.

Damit gilt: $Seq(w)$ und $length(w) = p + 1$.

Betrachte nun dazu folgende Formel aus $\sigma \in \mathcal{L}_{\text{PA}}$:

$\sigma(x_0, x_1, \ldots, x_k, y) :\hat{=}$

$$\begin{aligned} &\exists z : (\, \text{Seq}(z) \wedge \text{length}(z) = S(y) \;\wedge\; \phi_g((z)_0, \vec{x}) \\ &\quad \wedge\, \forall i < y : \phi_h((z)_{S(i)}, \vec{x}, i, (z)_i) \;\wedge\; x_0 = (z)_y \,) \end{aligned}$$

Zeige, dass σ die Funktion f repräsentiert:

Es ist zu zeigen:

$$f(\vec{n}, p) = m \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{PA} \vdash \sigma(\overline{m}, \overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k, \overline{p}) \quad (a) \\ \text{PA} \vdash \sigma(y, \overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k, \overline{p}) \to y = \overline{m} \quad (b) \end{cases}$$

Zeige zunächst (a) (Korrektheit):

Betrachte dazu die einzelnen Teilformeln von σ, bzw. die einzelnen Einsetzungen bei der beschränkten Quantifikation.

Es gilt: $\text{PA} \vdash \text{Seq}(\overline{w})$ und $\text{PA} \vdash \text{length}(\overline{w}) = \overline{p+1}$

Auch gilt für jedes $0 \leq i \leq p$: $\text{PA} \vdash (\overline{w})_{\overline{i}} = \overline{a}_i$

Ebenfalls gilt nach Induktionsvoraussetzung ($\rightsquigarrow$ wo ist hier eine Induktion?):

$$\begin{aligned}
&\text{PA} \vdash \phi_g(\overline{a}_0, \overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k) \\
&\text{PA} \vdash \phi_h(\overline{a}_1, \overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k, \overline{0}, \overline{a}_0) \\
&\text{PA} \vdash \phi_h(\overline{a}_2, \overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k, \overline{1}, \overline{a}_1) \\
&\qquad \vdots \\
&\text{PA} \vdash \phi_h(\overline{a}_p, \overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k, \overline{p-1}, \overline{a_{p-1}})
\end{aligned}$$

Damit gilt aber für jedes $i \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq i < p$: $\text{PA} \vdash \phi_h(\overline{a_{N(i)}}, \overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k, \overline{i}, \overline{a}_i)$

Es gilt ebenfalls: $\text{PA} \vdash \overline{m} = (\overline{w})_{\overline{p}}$

Daraus folgt aber insgesamt: $\text{PA} \vdash \sigma(\overline{m}, \overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k, \overline{p})$

Also ist (a) gezeigt.

Zeige noch (b) (Rechts-Eindeutigkeit): durch Induktion über p:

Sei dazu $m = f(\vec{n}, p)$ gegeben und $\nu :\hat{=} \overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k$ abkürzende Schreibweise für eben diese Zeichenreihe.

Ebenfalls sei: $\tau(x_0, x_1, \ldots, x_k, y, z)$ der Kern von σ (also ohne $\exists z$)

p=0: Es gilt: $m = f(\vec{n}, 0) = g(\vec{n})$.

Betrachte folgende Ableitung:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\sigma(y,\nu,\overline{0})}{\exists z : \tau(y,\nu,\overline{0},z)}\,(\hat{=}) \qquad \dfrac{\dfrac{[\tau(y,\nu,\overline{0},z)]^1}{y=(z)_0} \qquad \dfrac{[\tau(y,\nu,\overline{0},z)]^1}{\phi_g((z)_0,\nu)}}{\phi_g(y,\nu)}}{\phi_g(y,\nu)}\,(1) \qquad \dfrac{\text{PA}}{\phi_g(y,\nu) \rightarrow y=\overline{m}}}{y=\overline{m}}$$

Damit gilt: $\text{PA} \vdash \sigma(y, \nu, \overline{0}) \rightarrow y = \overline{m}$

p+1: Es gilt $m = f(\vec{n}, p+1) = h(\vec{n}, p, f(\vec{n}, p))$.

Nach IV gilt für $n := f(\vec{n}, p)$: $\text{PA} \vdash \sigma(y, \nu, \overline{p}) \rightarrow y = \overline{n}$

Betrachte folgende Ableitungen:

$\mathcal{D} :\doteq$

$$
\dfrac{\dfrac{[\tau(y,\nu,\overline{p+1},z)]^1}{y=(z)_{\overline{p+1}}} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathrm{IV}}{\overline{n}=(z)_{\overline{p}}} \; (\text{a miracle occurs}) \; \dfrac{[\tau(y,\nu,\overline{p+1},z)]^1}{\phi_h((z)_{S(\overline{p})},\nu,\overline{p},(z)_{\overline{p}})}}{\phi_h((z)_{S(\overline{p})},\nu,\overline{p},\overline{n})}}{\phi_h(y,\nu,\overline{p},\overline{n})}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\sigma(y,\nu,\overline{p+1})}{\exists z:\tau(y,\nu,\overline{p+1},z)}\;(\doteq) \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}\\ \phi_h(y,\nu,\overline{p},\overline{n})\end{matrix}}{\phi_h(y,\nu,\overline{p},\overline{n})}\;(1) \qquad \dfrac{\mathrm{PA}}{\phi_h(y,\nu,\overline{p},\overline{n}) \to y=\overline{m}}}{y=\overline{m}}
$$

Q.E.D.

5.11 Theorem (Repräsentierbarkeit von primitiv rekursiven Funktionen und Prädikaten): Die primitiv-rekursiven Funktionen und Prädikate sind repräsentierbar.

Beweis. Aus den Hilfssätzen folgt mit Induktion über der Konstruktion von primitiv rekursiven Funktionen die Behauptung. Q.E.D.

Bemerkungen:

(1) Die Repräsentation der Rekursion beruht wesentlich auf Listenerstellung; die Liste enthält alle vorherigen (also bisher berechneten) Funktionswerte.

(2) Alle repräsentierenden Formeln sind Σ_1; es wird sogar schon bei der Komposition beschränkt quantifiziert. Es kann aber angenommen werden, dass die verwendeten Σ_1-Formeln strikt Σ_1 sind. (vgl. Übung).

(3) Das Theorem läßt sich verallgemeinern. Auch totale μ-rekursive Funktionen sind in PA repräsentierbar. (Vgl. van Daalen, Theorem 7.5.6)

§6 Erster Unvollständigkeitssatz

Bisher wurden die technischen Voraussetzungen geschaffen, den ersten Unvollständigkeitssatz zu beweisen. In diesem Abschnitt wird zunächst ein Fixpunkt-Satz bewiesen; mit diesem ist dann unter der Voraussetzung der ω-Konsistenz der PA möglich, deren Unvollständigkeit (nach GÖDEL) zu zeigen. Dieses Ergebnis wird dann durch die Variante nach ROSSER verbessert, der lediglich die Konsistenz der PA benötigt.

6.1 DEF (Hilfsfunktionen): Zum Beweis des Fixpunkt-Satzes werden folgende, primitiv rekursiven Funktionen benötigt:

(1) $Num : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto \ulcorner\overline{n}\urcorner = \begin{cases} 11 & \text{für } n = 0 \\ 2^{13+1} \cdot 3^{31+1} \cdot 5^{Num(n-1)+1} \cdot 7^{37+1} & \text{sonst} \end{cases}$

(*Num ordnet jeder Zahl n die Kodierung ihrer Repräsentation zu.*)

(2) $s : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \langle n, m\rangle \mapsto s(n,m) := Sub(n, \ulcorner x_0\urcorner, Num(m))$

(*Spezialfall der Substitutions-Funktion; in Formeln mit Gödelnummer n wird die Variable x_0 durch den Term mit Gödelnummer m ersetzt.*)

6.2 Fixpunkt-Satz: Sei $\psi(x) \in \mathcal{L}_{\text{PA}}$ beliebige Formel mit der einzigen freien Variablen x ($\text{Fr}(\psi) = \{x\}$). Dann gibt es eine Formel $\phi \in \mathcal{L}_{\text{PA}}$ mit:

$$\text{PA} \vdash \phi \leftrightarrow \psi(\overline{\ulcorner\phi\urcorner}).$$

Interpretation: Zu jeder (einstelligen) Eigenschaft ψ gibt es eine Formel ϕ, die dau logisch-äquivalent ist, dass sie (kodiert und repräsentiert) die Eigenschaft ψ hat. Damit sagt ϕ (metasprachlich) aus: *Ich habe die Eigenschaft ψ.*

Beweis.

Definiere zunächst weitere Formeln:

(1) $\sigma(z, x, y)$ sei die Repräsentation der Hilfsfunktion s.

(2) $\theta(x) :\simeq \exists y : (\psi(y) \wedge \sigma(y, x, x))$

(3) $m :\simeq \ulcorner\theta(x_0)\urcorner$

(4) $\phi :\simeq \theta(\overline{m}) \simeq \exists y : (\psi(y) \wedge \sigma(y, \overline{m}, \overline{m}))$

Die repräsentierende Formel σ gibt es, da s primitiv rekursiv ist.

Damit gilt (Eindeutigkeit der Abbildung):

$$\text{PA} \vdash \forall y\big(\sigma(y, \overline{m}, \overline{m}) \leftrightarrow y = \overline{s(m,m)}\big)$$

Ebenfalls gilt:

$$\overline{s(m,m)} \simeq \overline{s(\ulcorner\theta(x_0)\urcorner, m)} \simeq \overline{sub(\ulcorner\theta(x_0)\urcorner, \ulcorner x_0\urcorner, Num(m))} \simeq \overline{\ulcorner\theta(\overline{m})\urcorner}$$

Damit gilt: $\mathrm{PA} \vdash \phi \leftrightarrow \exists y\big(\psi(y) \wedge y = \overline{\ulcorner\theta(\overline{m})\urcorner}\big)$

$\Rightarrow$ $\mathrm{PA} \vdash \phi \leftrightarrow \psi(\overline{\ulcorner\theta(\overline{m})\urcorner})$ (Beseitigung von $\exists y$.)

$\Rightarrow$ $\mathrm{PA} \vdash \phi \leftrightarrow \psi(\overline{\ulcorner\phi\urcorner})$ (Definition von ϕ.)

Damit wurde die Behauptung gezeigt. Q.E.D.

Bemerkung (Fixpunkt-Satz): Die Argumentation im Beweis des Fixpunkt-Satzes könnte vereinfacht werden, falls die primitiv rekursiven Funktionen in der PA durch Terme repräsentiert werden könnten. Man würde einen Term t_s finden, der s in der formalen Arithmetik repräsentiert. Um dies zu errreichen, müsste man aber alle Definitions-Gleichungen von primitiv rekursiven Funktionen zu den Axiomen der PA (wie schon bei der Exponentation geschehen) hinzunehmen.

Vorbemerkungen (Erster Unvolständigkeits-Satz):

(1) *Beweisbarkeits-Prädikat:* Im Beweis des ersten Unvollständigkeitssatzes wird das primitiv rekursive Prädikat $Prov(n, m)$ verwendet. Dabei kodiert $Prov(\ulcorner\mathcal{D}\urcorner, \ulcorner\phi\urcorner)$, dass $\mathcal{D}$ eine Ableitung für die Formel ϕ in der PA ist. $\overline{\mathrm{Prov}}(x, y)$ sei die Repräsentation in der formalen Arithmetik.

(2) *Konsistenz der* PA*:* GÖDEL benötigt für seinen Beweis der Unvollständigkeit, dass die PA ω-konsistent ist. Es hat sich gezeigt, dass man diese Voraussetzung abschwächen kann. So benötigt ROSSER in seinem Beweis nur noch die Konsistenz der PA.

6.3 Theorem (Erster Unvollständigkeitssatz, Gödel, 1931): Falls die PA ω-konsistent ist, dann ist sie unvollständig.

Beweis. Sei die PA ω-konsistent.

Definiere zunächst das einstellige Prädikat $\overline{\mathrm{Thm}}(y) :\simeq \exists x \overline{\mathrm{Prov}}(x, y)$.

Nach dem Fixpunktsatz gibt es zu der Eigenschaft $\psi(x) :\simeq \neg\overline{\mathrm{Thm}}(x)$ eine Formel ϕ, sodass:

$$\mathrm{PA} \vdash \phi \leftrightarrow \neg\overline{\mathrm{Thm}}(\overline{\ulcorner\phi\urcorner}) \quad (\star)$$

Interpretation: ϕ sagt (metasprachlich) aus: „*Ich bin nicht beweisbar.*"

Im Folgenden werden sowohl die Annahme $\mathrm{PA} \vdash \phi$ als auch die Annahme $\mathrm{PA} \vdash \neg\phi$ jeweils zum Widerspruch geführt:

Angenommen $\mathrm{PA} \vdash \phi$:

$\Rightarrow$ Es gibt einen Beweis $\mathcal{D}$ von ϕ mit $\ulcorner\mathcal{D}\urcorner = n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ Für dieses n: $Prov(n, \ulcorner\phi\urcorner)$.

$\Rightarrow$ Durch Repräsentation: $\mathrm{PA} \vdash \overline{\mathrm{Prov}}(\overline{n}, \overline{\ulcorner\phi\urcorner})$

$\Rightarrow$ Existenzeinführung: $\mathrm{PA} \vdash \exists x\, \overline{\mathrm{Prov}}(x, \overline{\ulcorner\phi\urcorner})$

$\Rightarrow$ Definition von $\overline{\mathrm{Thm}}$: $\mathrm{PA} \vdash \overline{\mathrm{Thm}}(\overline{\ulcorner\phi\urcorner})$ WIDERSPRUCH zu ($\star$)

Angenommen PA $\vdash \neg\phi$:

- $\Rightarrow$ Mit $(\star)$ gilt: PA $\vdash \overline{\text{Thm}}(\overline{\ulcorner\phi\urcorner})$
- $\Rightarrow$ Nach Def.: PA $\vdash \exists x\, \overline{\text{Prov}}(x, \overline{\ulcorner\phi\urcorner})$
- $\Rightarrow$ (mit ω-Konsistenz)
- $\Rightarrow$ Es gilt nicht für alle $n \in \mathbb{N}$: PA $\vdash \neg\overline{\text{Prov}}(\overline{n}, \overline{\ulcorner\phi\urcorner})$ $(\star\star)$

Andererseits gilt immer noch: PA $\vdash \neg\phi$

- $\Rightarrow$ Mit PA konsistent (ω-Konsistenz $\Rightarrow$ Konsistenz): PA $\nvdash \phi$.
- $\Rightarrow$ Es gibt kein $n \in \mathbb{N}$ mit: $Prov(n, \ulcorner\phi\urcorner)$.
- $\Rightarrow$ Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\neg Prov(n, \ulcorner\phi\urcorner)$.
- $\Rightarrow$ Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: PA $\vdash \neg\overline{\text{Prov}}(\overline{n}, \ulcorner\phi\urcorner)$ WIDERSPRUCH zu $(\star\star)$

Insgesamt wurde die Behauptung gezeigt. Q.E.D.

Für den Unvollständigkeitssatz in der Variante nach Rosser werden folgende Eigenschaften von Formeln in $\mathcal{L}_{\text{PA}}$ benötigt:

6.4 Lemma (Eigenschaften von $\mathcal{L}_{\text{PA}}$-Formeln):

(1) Für alle Δ_0-Formeln ϕ und ψ gilt:

$$\text{PA} \vdash \phi \vee \psi \quad \Rightarrow \quad \text{PA} \vdash \phi \quad \text{oder} \quad \text{PA} \vdash \psi$$

(2) Jede Σ_1-Formel ϕ ist logisch-äquivalent zu einer Formel ϕ', sodass ϕ' die selben freien Variablen wie ϕ hat und strikte Σ_1-Formel ist.

Beweis.

(1) Ergibt sich aus Proposition 4.5 (Vollständigkeit für Δ_0-Aussagen).

(2) Vgl. Übungsaufgaben und Boolos et al., S.204-207.

Q.E.D.

6.5 Theorem (Rosser): Falls die PA konsistent ist, dann ist sie unvollständig.

Bew. (Skizze):

Zunächst benötigt man, dass die Funktion $neg(n)$, die der Gödelnummer einer Formel $\phi \in \mathcal{L}_{\text{PA}}$ die Gödelnummer ihrer Negation zuordnet ($neg(\ulcorner\phi\urcorner) = \ulcorner\neg\phi\urcorner$), primitiv rekursiv und damit repräsentierbar ist.

Dann definiert man folgendes Prädikat:

$$\overline{\text{Ross}}(x) :\simeq \forall y\big(\overline{\text{Prov}}(y, x) \to \exists z < y : \overline{\text{Prov}}(z, \overline{\text{neg}}(x))\big)$$

Interpretation: $Ross(\ulcorner\phi\urcorner)$ sagt folgendes aus: Wenn es für die Formel ϕ in der PA einen Beweis mit Gödelnummer m gibt, dann findet sich ein Beweis von $\neg\phi$ in der Arithmetik mit kleinerer Gödelnummer. Dadurch wird in diesem Prädikat die Beweisbarkeit einer Formel mit einer schwachen Version der Konsistenz verbunden.

Nach obigem Lemma (2) kann man davon ausgehen, dass die Formel $\overline{\text{Ross}}(x)$ eine strikte Σ_1-Formel und damit das verwendete $\overline{\text{Prov}}(x,y)$ eine Δ_0-Formel.

Für $\overline{\text{Ross}}(x) \in \mathcal{L}_{\text{PA}}$ gibt es nach dem Fixpunktsatz eine Formel ϕ mit:

$$\text{PA} \vdash \phi \leftrightarrow \overline{\text{Ross}}(\overline{\ulcorner\phi\urcorner}) \quad (\dagger)$$

Interpretation: ϕ sagt aus: *Wenn ich beweisbar bin, dann ist meine Negation vor mir beweisbar.*

Mit der Voraussetzung, dass PA konsistent ist, wird nun analog zu Gödel in einem Widerspruchsbeweis gezeigt, dass $\text{PA} \nvdash \phi$ und $\text{PA} \nvdash \neg\phi$.

Angenommen $\text{PA} \vdash \phi$:

- $\Rightarrow$ Es gibt einen Beweis $\mathcal{D}$ für ϕ mit $\ulcorner\mathcal{D}\urcorner = n \in \mathbb{N}$.
- $\Rightarrow$ Für dieses n gilt: $Prov(n, \ulcorner\phi\urcorner)$.
- $\Rightarrow$ Durch Repräsentation: $\text{PA} \vdash \overline{\text{Prov}}(\overline{n}, \overline{\ulcorner\phi\urcorner})$.
- $\Rightarrow$ Aus ($\dagger$) und der Definition von $\overline{\text{Ross}}$ folgt: $\text{PA} \vdash \exists y < \overline{n} : \overline{\text{Prov}}(y, \overline{\ulcorner\neg\phi\urcorner})$.
- $\Rightarrow$ Damit gilt: $\text{PA} \vdash \bigvee_{k<n} \overline{\text{Prov}}(\overline{k}, \overline{\ulcorner\neg\phi\urcorner})$.
- $\Rightarrow$ Da $\overline{\text{Prov}}(x,y)$ eine Δ_0-Formel ist, folgt mit obigem Lemma (1):

$$\text{PA} \vdash \overline{\text{Prov}}(\overline{0}, \overline{\ulcorner\neg\phi\urcorner}) \text{ oder } \ldots \text{ oder } \text{PA} \vdash \overline{\text{Prov}}(\overline{n-1}, \overline{\ulcorner\neg\phi\urcorner})$$

- $\Rightarrow$ Damit gibt es ein $k < n$ mit: $\text{PA} \vdash \overline{\text{Prov}}(\overline{k}, \overline{\ulcorner\neg\phi\urcorner})$.
- $\Rightarrow$ Damit gilt: $\text{PA} \vdash \neg\phi$. WIDERSPRUCH zur Konsistenz von PA.

Angenommen $\text{PA} \vdash \neg\phi$:

- $\Rightarrow$ Es gibt einen Beweis $\mathcal{D}$ für $\neg\phi$ mit $\ulcorner\mathcal{D}\urcorner = n \in \mathbb{N}$.
- $\Rightarrow$ $\text{PA} \vdash \overline{\text{Prov}}(\overline{n}, \overline{\ulcorner\neg\phi\urcorner})$
- $\Rightarrow$ $\text{PA} \vdash \forall y > \overline{n} : \big(\exists z < y : \overline{\text{Prov}}(z, \overline{\ulcorner\neg\phi\urcorner})\big) \quad (\ddagger)$

  Aufgrund der Widerspruchsfreiheit der PA gilt: $\text{PA} \nvdash \neg\phi$.
- $\Rightarrow$ Für alle $k \in \mathbb{N}$: nicht $Prov(k, \ulcorner\phi\urcorner)$.
- $\Rightarrow$ Für alle $k \in \mathbb{N}$: $\text{PA} \vdash \neg\overline{\text{Prov}}(\overline{k}, \overline{\ulcorner\phi\urcorner})$
- $\Rightarrow$ Für alle $k \in \mathbb{N}$: $\text{PA} \vdash \forall y < \overline{k} \neg\overline{\text{Prov}}(y, \overline{\ulcorner\phi\urcorner})$
- $\Rightarrow$ Für alle $k \in \mathbb{N}$: $\text{PA} \vdash \forall y \big(\overline{\text{Prov}}(y, \overline{\ulcorner\phi\urcorner}) \rightarrow y \geq \overline{k}\big)$

$\Rightarrow$ Mit $n := k + 1$: $\quad \mathrm{PA} \vdash \forall y\big(\overline{\mathrm{Prov}}(y, \overline{\ulcorner \phi \urcorner}) \to y > \overline{n}\big)$

$\Rightarrow$ Mit (‡): $\quad \mathrm{PA} \vdash \forall y\big(\overline{\mathrm{Prov}}(y, \overline{\ulcorner \phi \urcorner}) \to \exists z < y : \overline{\mathrm{Prov}}(z, \overline{\ulcorner \neg\phi \urcorner})\big)$

Das heißt: $\quad \mathrm{PA} \vdash \overline{\mathrm{Ross}}(\overline{\ulcorner \phi \urcorner})$

$\Rightarrow$ Mit (†) folgt: $\quad \mathrm{PA} \vdash \phi \quad$ Widerspruch zur Konsistenz von PA

q.e.d.

§7 Zweiter Unvollständigkeitssatz

Der zweite Unvollständigkeitssatz von Gödel zeigt, dass ein Beweis der Widerspruchsfreiheit für die PA in der PA nicht möglich ist. Es wird also gezeigt: „*Die Widerspruchsfreiheit der* PA *ist formal nicht beweisbar.*"

Gödel selbst hat in seiner Arbeit den zweiten Unvollständigkeitssatz lediglich skizziert. Ein detailierterer Beweis wurde von Bernays in Hilbert/Bernays II (1939) durchgeführt. Hier wird ebenfalls nur eine Skizze gegeben.

Das Folgende läßt sich ohne Probleme für beliebige rekursiv-axiomatisierte Erweiterungen der PA übertragen; es ist nicht entscheidend, welche Axiome konkret in das Axiomensystem aufgenommen werden. Hier wird aber nur der spezielle Fall der eigentlichen PA behandelt.

Konventionen:

(1) Im Folgenden wird das Falsum ($\perp$) als abkürzende Schreibweise für die $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$-Formel $0 = 1$ verwendet.

(2) Der Gödel-Satz „*Ich bin nicht beweisbar.*"wird durch ϕ_G bezeichnet.

(3) Bei Ableitbarkeits-Aussagen in der PA wird in diesem Abschnitt an einigen Stellen der Verweis auf die PA weggelassen. Das bedeutet: $\vdash \phi$ steht im Folgenden immer für PA $\vdash \phi$.

(4) Als ergänzende Literatur zu diesem Abschnitt wird empfohlen:
Boolos/Burge/Jeffrey, Kap. 18, und Felscher III, Kap. 11.

7.1 Grundidee (Zweiter Unvollständigkeitssatz): Bevor technische Details zum zweiten Unvollständigkeitssatzes skizziert werden, soll hier zunächst die Grundidee angegeben werden:

Die Widerspruchsfreiheit (Konsistenz) der DPA wird durch folgende Relation charakterisiert:

$$Cons(\mathrm{PA}) \quad :\Leftrightarrow \quad \text{nicht } Thm(\ulcorner 0 = 1 \urcorner) \quad \Leftrightarrow \quad \text{nicht } \exists x : Prov(x, \ulcorner 0 = 1 \urcorner)$$

In dieser Notation hat der erste Unvollständigkeitssatz folgende Struktur:

$$Cons(\mathrm{PA}) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (a) & \text{nicht } Thm(\ulcorner \phi_G \urcorner) \\ (b) & \text{falls PA } \omega\text{-konsistent: nicht } Thm(\ulcorner \neg\phi_G \urcorner) \end{cases}$$

Durch Internalisierung der metasprachlichen Aussage (a) kann folgendes in der PA bewiesen werden:

$$\mathrm{PA} \vdash \neg\overline{\mathrm{Thm}}(\overline{\ulcorner 0 = 1 \urcorner}) \to \neg\overline{\mathrm{Thm}}(\overline{\ulcorner \phi_G \urcorner}) \quad (\star)$$

Aufgrund der Fixpunkt-Eigenschaft von ϕ_G gilt ebenfalls:

$$\mathrm{PA} \vdash \phi_G \leftrightarrow \neg\overline{\mathrm{Thm}}(\overline{\ulcorner \phi_G \urcorner})$$

Damit erhält man:

$$\mathrm{PA} \vdash \neg\overline{\mathrm{Thm}}(\overline{\ulcorner 0 = 1 \urcorner}) \to \phi_G$$

Gäbe es also einen Beweis für die Konsistenz von PA in PA ($\mathrm{PA} \vdash \overline{\mathrm{Cons(PA)}}$), hätte man einen Beweis für die Gödelaussage ϕ_G gefunden. Dies steht aber im Widerspruch zum ersten Unvollständigkeitssatz.

Problematisch ist lediglich die Internalisierung ($\star$). Dazu wird zunächst diskutiert, was ein Beweisbarkeits-Prädikat ist.

7.2 DEF (Beweisbarkeits-Prädikat): Eine Formel $B(x)$ mit genau einer freien Variablen x heißt Beweisbarkeits-Prädikat, falls für alle Aussagen $\phi \in \mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ gilt:

(BL1) $\vdash \phi \quad \Rightarrow \quad \vdash B(\overline{\ulcorner \phi \urcorner})$

(BL2) $\vdash B(\overline{\ulcorner \phi \to \psi \urcorner}) \to (\, B(\overline{\ulcorner \phi \urcorner}) \to B(\overline{\ulcorner \psi \urcorner})\,)$

(BL3) $\vdash B(\overline{\ulcorner \phi \urcorner}) \to B(\overline{\ulcorner B(\overline{\ulcorner \phi \urcorner}) \urcorner})$

Bemerkungen:

(1) BL steht als Abkürzung für Bernays und Löb.

(2) (BL2) ist die Internalisierung des Modus Ponens und (BL3) die Internalisierung von (BL1).

(3) $B(x) :\hat{=}\ x = x$ ist trivialerweise ein Beweisbarkeits-Prädikat.

Konvention (Notation): Im Folgenden wird als Abkürzung für $B(\overline{\ulcorner \phi \urcorner})$ die modallogische Schreibweise $\Box\phi$ verwendet. Damit erfüllt ein Beweisbarkeits-Prädikat B folgende Axiome:

(BL1) $\vdash \phi \quad \Rightarrow \quad \vdash \Box\phi$

(BL2) $\vdash \Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi)$

(BL3) $\vdash \Box\phi \to \Box\Box\phi$

7.3 Lemma: Die Formel $\overline{\mathrm{Thm}}(x)$ ist ein Beweisbarkeits-Prädikat.

Bew. (Skizze):

(BL1): Sei $\vdash \phi$ für eine Aussage $\phi \in \mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ gegeben.

$\Rightarrow$ Es gibt einen Beweis von ϕ.

$\Rightarrow$ Es gilt (nach Konstruktion): $Thm(\ulcorner \phi \urcorner)$.

$\Rightarrow$ Durch Repräsentation erhält man: $\vdash \overline{\mathrm{Thm}}(\overline{\ulcorner \phi \urcorner})$

(BL2) und (BL3): Die Beweise sind technisch aufwendiger und verbleiben hier unbewiesen (vgl. dazu Felscher). Q.E.D.

Der Beweis des zweiten Unvollständigkeitssatzes benötigt noch Löbs Theorem.

7.4 Theorem (Löb): Für ein beliebiges Beweisbarkeits-Prädikat $\Box$ und alle Aussagen $\phi \in \mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ gilt:

$$\vdash \Box\phi \to \phi \quad \Rightarrow \quad \vdash \phi$$

Beweis. Sei $\phi \in \mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ beliebige Aussage, sodass $\vdash \Box\phi \to \phi$ gilt.
Zu der einstelligen Eigenschaft $(\Box(\cdot) \to \phi)$ gibt es nach dem Fixpunkt-Satz eine Formel ψ, sodass folgendes gilt:

$$\vdash \psi \leftrightarrow (\Box\psi \to \phi) \quad (\star\star)$$

Daraus folgt zunächst: $\vdash \psi \to (\Box\psi \to \phi)$.

- $\Rightarrow$ mit (BL1): $\vdash \Box(\psi \to (\Box\psi \to \phi))$
- $\Rightarrow$ mit (BL2): $\vdash \Box\psi \to \Box(\Box\psi \to \phi)$
- $\Rightarrow$ mit (BL2): $\vdash \Box\psi \to (\Box\Box\psi \to \Box\phi)$
- $\Rightarrow$ mit $A \to (B \to C) \dashv\models (A \to B) \to (A \to C)$:
  $\vdash (\Box\psi \to \Box\Box\psi) \to (\Box\psi \to \Box\phi)$
- $\Rightarrow$ mit (BL3) und Modus Ponens: $\vdash \Box\psi \to \Box\phi$
- $\Rightarrow$ nach Voraussetzung gilt $\vdash \Box\phi \to \phi$, mit Kettenschluss: $\vdash \Box\psi \to \phi \quad (\star\star\star)$
- $\Rightarrow$ mit $(\star\star)$ von rechts und Modus Ponens: $\vdash \psi$
- $\Rightarrow$ mit (BL1): $\vdash \Box\psi$
- $\Rightarrow$ mit $(\star\star\star)$ und Modus Ponens schließlich: $\vdash \phi$.

Damit wurde Löbs Theorem gezeigt. Q.E.D.

Bemerkung (Modallogische Interpretation): Wie die modallogische Notation schon nahelegt, kann anstatt der Theorie der Beweisbarkeits-Prädikate auch Modallogik betrieben werden:

(BL1) entspricht der *Nezessitations-Regel*.

(BL2) entspricht der *Distributivität*.

(BL3) entspricht dem Axiom 4

Damit entsprechen die Axiome (BL1) – (BL3) dem System K4.

In K4 kann der Satz von Löb nicht bewiesen werden, da hier der Fixpunkt-Satz fehlt. Entsprechend wird der Satz von Löb in der modallogischen Behandlung als Regel hinzugenommen.

GL = (BL1) – (BL3) + (Satz von Löb) ist das System, in dem die modallogische Theorie der Beweisbarkeits-Prädikate behandelt wird. („GL" steht für Gödel-Löb.) Diese Theorie zeigt, dass sich grundlegende Eigenschaften von prädikatenlogischen Beweisbarkeitslogik in einer *aussagenlogischen* modalen Theorie behandeln lassen. Eine sehr gut lesbare Einführung findet sich bei Bülov (2006). Eine Darstellung, die auch die allgemeinen modallogischen Hintergründe behandelt ist Friedrichsdorf (1992).

7.5 Theorem (Zweiter Unvollständigkeitssatz, Gödel, 1932): Ist die PA konsistent (PA $\nvdash 0 = 1$), dann kann ihre Konsistenz nicht in der PA bewiesen werden:

$$\mathrm{PA} \nvdash \neg\overline{\mathrm{Thm}}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner).$$

Beweis.

Sei PA $\nvdash 0 = 1$.

Angenommen PA $\vdash \neg\Box(0 = 1)$ für ein Beweisbarkeits-Prädikat $\Box$.

$\Rightarrow$ Für beliebige Aussage $\phi \in \mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$: PA $\vdash \Box(0 = 1) \to \phi$

$\Rightarrow$ PA $\vdash \Box 0 = 1 \to 0 = 1$

$\Rightarrow$ Da $\overline{\mathrm{Thm}}$ ein Beweisbarkeits-Prädikat ist, folgt mit Löbs Theorem:
PA $\vdash 0 = 1$ WIDERSPRUCH zur Annahme PA $\nvdash 0 = 1$.

Q.E.D.

7.6 Korollar: Für jedes Beweisbarkeits-Prädikat $\Box$ gilt, dass die $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$-Formel $\phi :\simeq$ „*Ich bin $\Box$-beweisbar.*" tatsächlich in PA beweisbar ist.

Beweis.

Es gilt nach Fixpunktsatz: PA $\vdash \phi \leftrightarrow \Box\phi$. Daraus folgt mit Löb: PA $\vdash \phi$.

Q.E.D.

7.7 Korollar: Falls die PA konsistent ist, dann hat die PA kein (intern definiertes) Wahrheits-Prädikat.

Beweis. Angenommen $\overline{\mathrm{True}}(x)$ wäre ein Wahrheits-Prädikat.

Das bedeutet: für jede Aussage $\phi \in \mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ gilt:

$$\mathrm{PA} \vdash \phi \leftrightarrow \overline{\mathrm{True}}(\ulcorner \phi \urcorner).$$

Insbesondere ist $\overline{\mathrm{True}}(x)$ ein Beweisbarkeits-Prädikat (leicht zu zeigen).

Damit gilt (mit Löb): PA $\vdash \phi$ für jedes $\phi \in \mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$.

Damit ist die PA inkonsistent. WIDERSPRUCH Q.E.D.

§8 Philosophische Bemerkungen

Zum Abschluss sollen noch einige philosophische Bemerkungen im Umfeld der beiden Begriffe Vollständigkeit und Unvollständigkeit gemacht werden.

Wir haben (aufgrund der Vollständigkeit der Prädikaten-Logik) die Vollständigkeit für jede (rekursiv-axiomatisierbare) Theorie T:

$$T \models \phi \;\Leftrightarrow\; T \vdash \phi$$

Für T können wir auch die Axiome der formalen Arithmetik nehmen. Damit gilt:

$$\mathrm{PA} \models \phi \;\Leftrightarrow\; \mathrm{PA} \vdash \phi$$

Das bedeutet, dass genau die Formeln, die in allen PA-Modellen gültig sind, aus den Axiomen der PA abgeleitet werden können. Insofern ist die PA vollständig.

Die Unvollständigkeit der PA verweist darauf, dass der Gödel-Satz ϕ_G im Standard-Modell $\mathbb{N}$ der PA zwar gültig (wurde in dieser Vorlesung nicht bewiesen), aber nicht aus den Axiomen der PA ableitbar ist:

$$\mathbb{N} \models \phi_G \quad \text{aber} \quad \mathrm{PA} \nvdash \phi_G$$

Modelltheoretisch bezieht sich die Vollständigkeit auf Gültigkeit in allen Modellen. Die Unvollständigkeit aber bezieht sich auf Gültigkeit in *einem speziellen Modell* (Standard-Modell $\mathbb{N}$).

Es muss also Nichtstandard-Modelle $\mathfrak{M}$ der PA geben, in der der Gödel-Satz ϕ_G nicht gültig ist ($\mathfrak{M} \not\models \phi_G$); ansonsten wäre ϕ_G nach dem Vollständigkeits-Satz aus den Axiomen ableitbar.

Ebenfalls gibt es Nicht-Standardmodelle der PA, in denen der Satz „*Die* PA *ist inkonsistent.*“, also $\overline{\mathrm{Thm}}(\ulcorner\perp\urcorner)$, wahr ist. Ansonsten wäre der Satz „*Die* PA *ist konsistent*“, also $\neg\overline{\mathrm{Thm}}(\ulcorner\perp\urcorner)$, in allen Modellen wahr und entsprechend nach dem Vollständigkeits-Satz beweisbar.[5]

Man könnte auch modelltheoretisch den Unvollständigkeitssatz durch die explizite Konstruktion geeigneter Nichtstandard-Modelle direkt beweisen. Das bedeutet, dass man zwei Modelle $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ der PA konstruiert, so dass für ein geeignete Aussage $\phi \in \mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ gilt:

$$\mathfrak{M}_1 \models \phi \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_2 \models \neg\phi$$

Damit entspricht die Unabhängigkeit einer Aussage von einem Axiomsystem der Unvollständigkeit des Axiomsystems. Eine solche Aussage wurde z.B. von Paris und Harrington angegeben. Vgl. auch Kripke/Putnam. Auch Gentzens (1943) direkter NAchweis, dass ϵ_0-Induktion nicht in der Arithmetik erster Stufe herleitbar ist, kann man als Nachweis einer „wahren“ mathematischen Aussage ansehen, die nicht in der Peano-Arithmetik herleitbar ist.

[5] vgl. Franzén, Gödel's Theorem (2005)

Die Theorie PA^2 – das ist die in Logik zweiter Stufe axiomatisierte Arithmetik – ist kategorisch; je zwei Modelle sind (bezüglich der Standard-Semantik) isomorph. Das bedeutet, dass die Axiome alle Modelle bis auf Isomorphie charakterisieren.

Damit gilt für jede Aussage $\phi \in \mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$:

$$\text{entweder} \quad \mathrm{PA}^2 \models \phi \quad \text{oder} \quad \mathrm{PA}^2 \models \neg\phi$$

($\models$ im Sinne der Standard-Semantik verstanden.)

Dies gilt, da:

(1) für jedes Modell $\mathfrak{M}$ gilt:

$$\mathfrak{M} \models \phi \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{N} \models \phi$$

für ein ausgezeichnetes Modell $\mathfrak{N}$.

(2) für jede Aussage ϕ gilt (nach Definition von Strukturen) immer:

$$\mathfrak{M} \models \phi \quad \text{oder} \quad \mathfrak{M} \models \neg\phi$$

Die PA^2 bleibt aber syntaktisch unvollständig; es gibt Aussagen $\phi \in \mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$, so dass $\mathrm{PA}^2 \not\vdash \phi$ und $\mathrm{PA}^2 \not\vdash \neg\phi$.

Für die Unvollständigkeit ist nicht alleine das Induktions-Schema verantwortlich. Die Robinson-Arithmetik enthält kein Induktions-Schema und ist endlich axiomatisierbar, ist aber trotzdem unvollständig. Ihre Axiome sind:

(1) $S(x) \neq 0$

(2) $S(x) = S(y) \rightarrow x = y$

(3) $y = 0 \vee \exists x\, Sx = y$

(4) $x + 0 = x$

(5) $x + S(y) = S(x + y)$

(6) $x \cdot 0 = 0$

(7) $x \cdot S(y) = S(x \cdot y + x)$

Wegen des Fehlens des Induktions-Schemas ist z.B. die Formel $x+y = y+x$ nicht ableitbar, obwohl für alle Ziffern $\overline{n}, \overline{m}$ die Aussage $\overline{n} + \overline{m} = \overline{m} + \overline{n}$ ableitbar ist. Eine knappe Darstellung mit Literaturangaben findet sich in der (englischen) Wikipedia.

Als Grundlage für beweistheoretische Untersuchungen wählt man häufig die auf Skolem (1923) zurückgehende primitiv rekursive Arithmetik (PRA). Hierbei handelt es sich um eine quantorenfreie Theorie, die aus folgenden arithmetischen Axiomen besteht:

(1) $S(x) \neq 0$

(2) $S(x) = S(y) \rightarrow x = y$

(3) rekursive Definitionsgleichungen für alle primitiv rekursiven Funktionen

(4) das quantorenfreie Induktions-Schema:

$$\dfrac{\phi(0) \qquad \dfrac{[\phi(x)]^1}{\phi(S(x))}}{\phi(x)} \,(1)$$

Die PRA wird dabei meist als der finite Kern der Arithmetik angesehen, in dem sich Widerspruchsfreiheitbeweise formalisieren lassen (unter Hinzunahme geeigneter weiterer Prinzipien wie transfinite Induktion).