

8.4 Interferenz und Beugung

Als Interferenz bezeichnet man die Überlagerung von mehreren Wellen, die sich in unterschiedliche Richtungen ausbreiten. Jeder kennt Interferenzmuster von Wasserwellen, wenn sich z. B. auf einem See bei Regen die sich kreisförmig ausbreitenden Wellen benachbarter Tropfen überlagern. Allerdings ändert sich dieses Muster zeitlich und räumlich mit jedem Tropfen. Qualitativ entsprechend verhält sich die Interferenz von elektromagnetischen Wellen. Besonders leicht zu interpretieren werden die Beobachtungen, wenn das Interferenzmuster räumlich konstant bleibt, was einer Momentaufnahme des Sees im Regen entspricht.

Im Huygens-Fresnelschen Prinzip sind beliebige Raumpunkte Quellen von Kugelwellen, deren Amplituden sich an jedem Ort additiv überlagern. Als Beugung bezeichnet man die Intensitätsverteilung in Interferenzmustern hinter beleuchteten Objekten. Ein mathematisches Verfahren, das der Überlagerung von Wellen entspricht, ist die „Fourier-Transformation“. Die Erinnerung an die Äquivalenz von Huygens-Fresnelscher Summation und Fourier-Transformation ist hilfreich, um einige Beugungserscheinungen zu erklären.

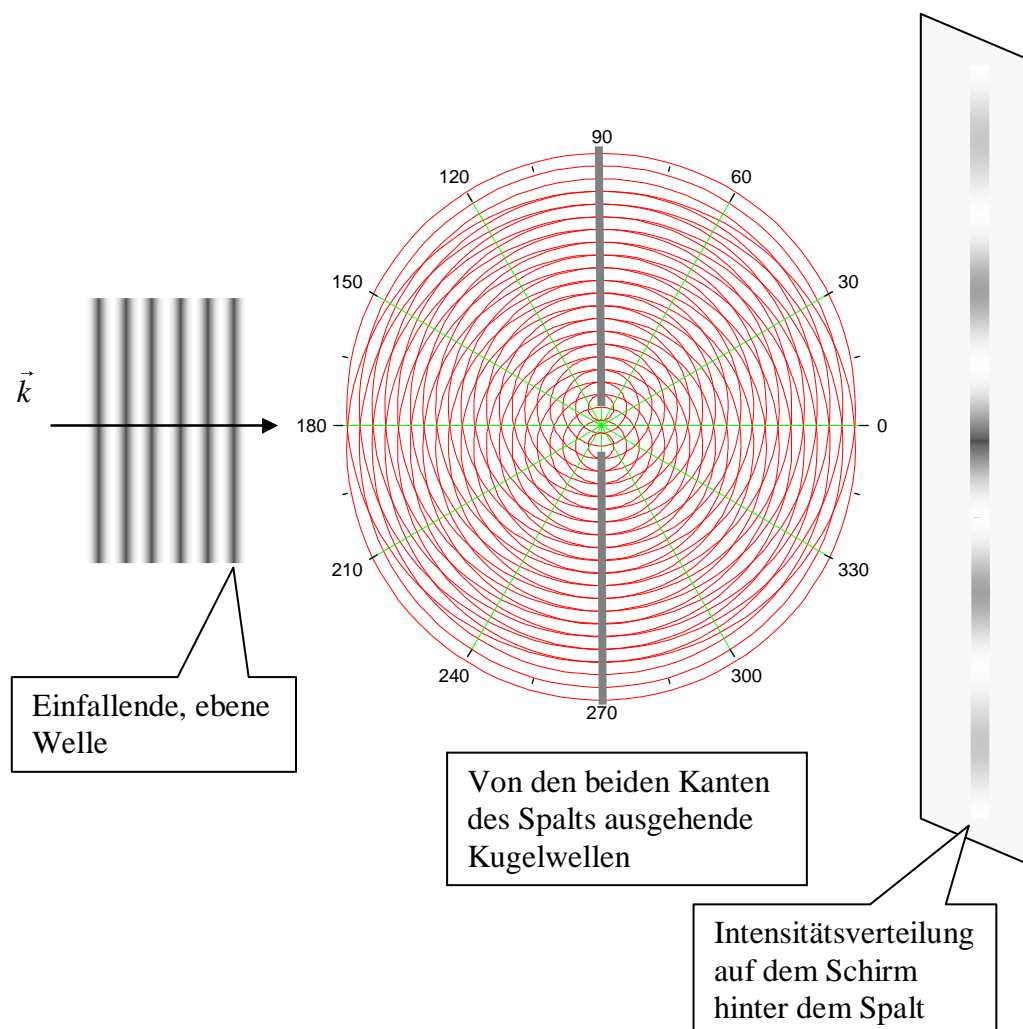


Abbildung 1 Ein beleuchteter Spalt stehe senkrecht zur Zeichenebene. Sein Beugungsbild entsteht aus Interferenz aller Wellen, die - nach dem Huygens-Fresnelschen Prinzip - von den Punkten zwischen den Kanten ausgehen. Gezeichnet sind nur die von beiden Kanten des Spalts ausgehenden Wellen. Man erkennt qualitativ Richtungen hoher und geringer Intensität.

8.4.1 Kohärenz

Ein räumlich konstantes Interferenzmuster setzt eine kontinuierliche, gleichbleibende Anregung voraus: Die Tropfen müssen im Gleichtakt an mindestens zwei unterschiedlichen, aber gleichbleibenden Orten eintreffen. Wellen mit gleichbleibender Richtung und Frequenz heißen kohärente Wellen. Für natürliches Licht gilt als Abschätzung: Die Lichtemission eines Atoms dauert ungefähr 10^{-8} Sekunden, in dieser Zeit wird ein Wellenzug der Länge

$$l = c \cdot \Delta t = 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 3 \text{ m}$$

ausgesandt, der Kohärenzlänge für natürliches Licht. Außerdem darf die Lichtquelle nicht zu ausgedehnt sein, weil sonst, auch von einer gleichphasig sendenden Quelle, in unterschiedlichen Blickwinkeln die Phasenlage variiert. Bis zur kommerziellen Entwicklung des Lasers konnten kohärente Wellenzüge mit natürlichem Licht nur durch Aufteilung einer Lichtwelle in Teilstrahlen erzeugt werden. Der Laser, (in einfachster Form als Laserzeiger zu ~50 DM für jeden erschwinglich) ist eine für Beugungs- und Interferenzversuche „ideale“ Quelle: Das Licht ist kohärent, das heißt, der Wellenzug schwingt mit gleicher Phase und breitet sich nur in einer einzigen Richtung aus, so daß die Annahme einer ebenen Welle gerechtfertigt ist.

8.4.2 Interferenzfarben

Ein Beispiel, bei dem die Betrachtung von zwei Wellenzügen genügt, ist die Erklärung der Farberscheinung an dünnen Schichten, z. B. an einer Ölschicht auf einer Wasseroberfläche. Eine ebene Welle falle aus einem Medium der Brechzahl n_1 unter dem Winkel α auf eine Schicht der Dicke d und der Brechzahl n_2 . Betrachtet man zwei parallel zueinander einfallende Strahlen, dann werden sie teilweise reflektiert, teilweise dringen sie in das Medium ein. Die Teilwellen entstehen aus der gleichen Primärwelle, deshalb sind sie auch bei natürlichem Licht kohärent und führen bei Überlagerung zur Verstärkung oder Auslöschung, in Abhängigkeit von Wellenlänge und Beobachtungswinkel. Das Medium durchlaufenden Strahlen zeigen gegenüber den an der Oberfläche reflektierten eine andere Phase. Allerdings muß der Laufweg der Wellen zwischen Aufteilung und Überlagerung kleiner als die Kohärenzlänge des Lichtes sein: Deshalb die Einschränkung der folgenden Konstruktion „auf dünne Schichten“.

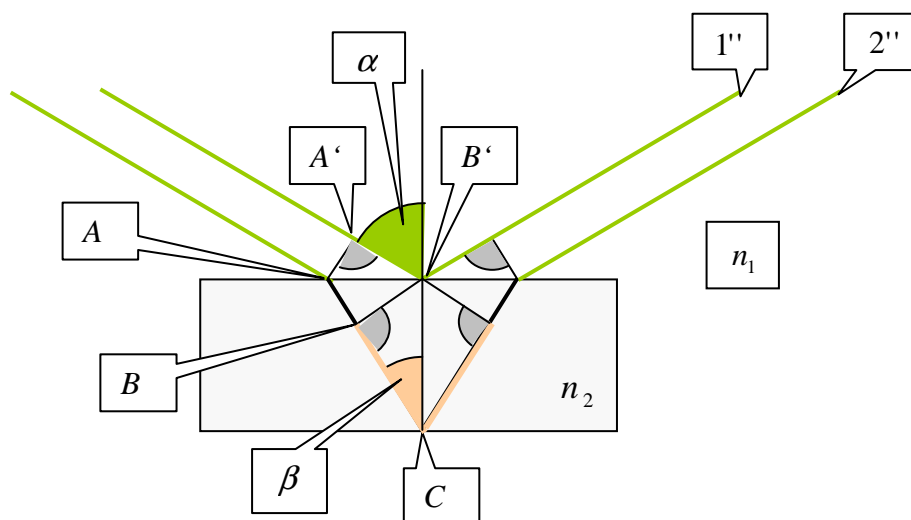


Abbildung 2 Interferenz an einer Platte der Dicke d . Die grau gezeichneten Winkel betragen 90° . Die Bezeichnungen beziehen sich auf die folgende Tabelle.

Der Gangunterschied zwischen den parallel zueinander auslaufenden Wellen 1'' und 2'', deren Überlagerung ein Beobachter in großer Entfernung sieht, ist durch die unterschiedliche Phase zwischen diesen bestimmt. Nach dem Fermatschen Prinzip ist die Laufzeit der Welle von A' nach B' gleich der von A nach B. Der für die Phasenverschiebung maßgebliche Lichtweg Δ ist das Produkt des Wegs mit der Brechzahl. Er errechnet sich zu:

$\overline{BC} = d \cdot \cos \beta$	Strecke von B nach C
$\Delta = 2 \cdot d \cdot n_2 \cdot \cos \beta$	Lichtweg im Medium mit Brechzahl n_2
$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$	
$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$	Das Brechungsgesetz verbindet den Einfallswinkel auf die Oberfläche α mit dem Winkel β im Medium 2, es gelte $n_1 = 1$
$\Delta = 2 \cdot d \cdot \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \alpha}$	Lichtweg, abhängig vom Einfallswinkel auf die Oberfläche
Für $n_2 > n_1$ gilt:	
$\Delta = 2 \cdot d \cdot \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda}{2}$	Die am dichteren Medium reflektierte Welle 1'' ändert die Phase um $\pi/2$, deshalb wird $\lambda/2$ zum Lichtweg addiert
In Abhängigkeit vom Einfallswinkel folgt für die an der Oberfläche beobachteten Wellen:	
Verstärkung	Auslöschung
$\Delta = 2 \cdot d \cdot \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda}{2} = z \cdot \lambda$	$\Delta = 2 \cdot d \cdot \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda}{2} = (2z + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$
$\lambda = \frac{4}{2 \cdot z - 1} \cdot d \cdot \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \alpha}$	$\lambda = \frac{2}{z} \cdot d \cdot \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \alpha}$

Blickt man auf eine dünne Schicht (kleines d), dann sieht man diese Schicht für unterschiedliche Blickwinkel in unterschiedlichen bunten Farben. Ist die Schicht zu dünn, dann bleibt letztlich nur noch der Phasensprung um $\lambda/2$, es erscheinen diese Bereiche schwarz. Wird die Schicht dicker, dann ändern schon kleinste Variationen des Einfallswinkels die Farbe. Im Auge mischen sich dann die Farben, weil die endliche Öffnung der Pupille Strahlen aus einem endlichen Winkelbereich erfasst.

Versuch 1 Farben an der Seifenblase, bevor sie zerplatzt sieht man schwarze Streifen

Versuch 2 Interferenzfilter: Eine dünne Schicht wird mit senkrechtem Einfall mit weißem Licht bestrahlt. Die zur reflektierten Farbe komplementäre wird durchgelassen.

8.4.3 Beugung

Die Beugungserscheinungen sind an einer idealen Quelle (Laser) mit kohärentem, parallelem Licht am besten zu verstehen, weil dieses einer einzigen ebenen Welle entspricht. Wird ein Objekt, z. B. ein Spalt, in den Strahl eines Lasers gebracht und das Beugungsbild auf einem Schirm beobachtet, dann werden bei genügend großer Entfernung des Schirms vom Objekt die einzelnen Beugungsordnungen sichtbar. Beugung in dieser Geometrie wird „Fraunhofer-sche Beugung“ genannt.

Konstruktionen mit Strahlen beschreiben die Beugung nicht adäquat: Zeichnet man, um die Lage der Wellenfelder anzudeuten, die vom Spalt ausgehenden Strahlen so breit wie der Spalt, dann entspricht die Breite der Linien nur im Nahfeld der Spaltbreite, denn: in größerer Entfernung werden die Beugungsfiguren bei Verbreiterung des Spalts schmaler! Beugungsbilder zeigen noch eine andere Besonderheit: Die Intensität an einem Ort der Beugungsfigur hängt, außer im Nahfeld, nur von der Richtung zum Objekt ab. Außerdem bleibt das Beugungsbild bei Verschiebung des Objekts praktisch unverändert, solange sich das Objekt noch im Primärstrahl befindet. Die Abbildung ist dagegen vom Winkel und vom Ort der optischen Komponenten abhängig, ein Dia z. B. muß auf die Leinwand fokussiert werden. Verschiebt man die Leinwand, dann wird das Bild unscharf und das Bild verschiebt sich, wenn das Dia verschoben wird.

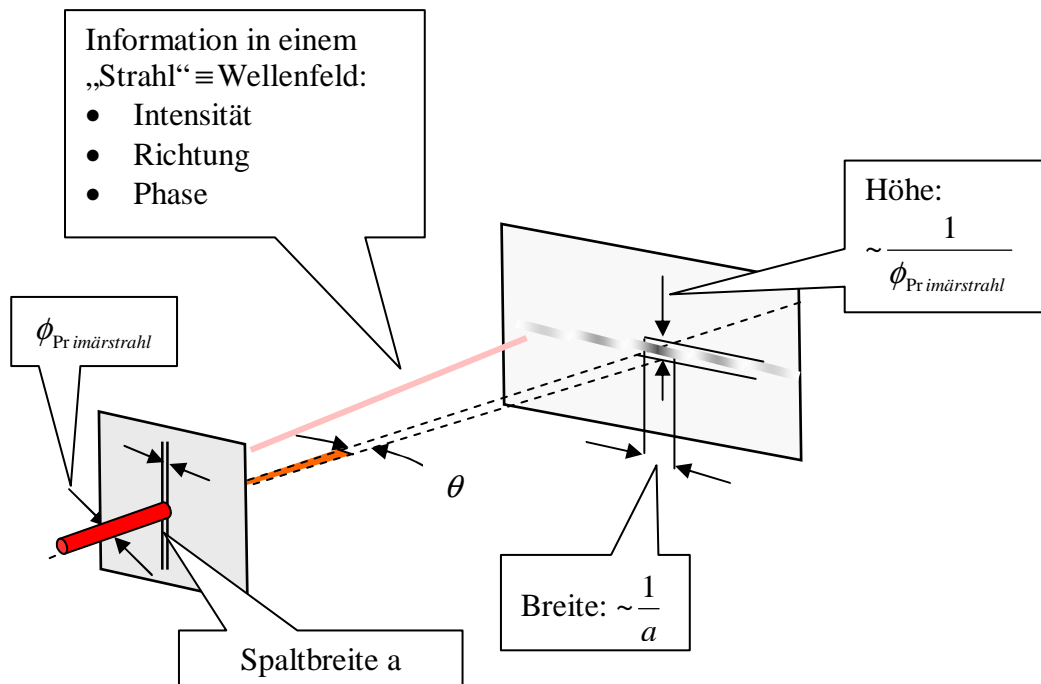


Abbildung 3 Beugung am Spalt. Aufbau und Beugungsbild in Abhängigkeit vom Beugungswinkel θ

(Math. Behandlung: http://www.uni-tuebingen.de/uni/pki/skripten/V_Huygens_Spalt.DOC).

Versuch 3 Beugung an einem Spalt mit variabler Breite. Man beobachtet auf einem Schirm in ca. 3m Entfernung das Beugungsbild des Spalts mit zunehmender Spaltbreite. Man vergleicht es mit der Abbildung des Spalts auf dem gleichen Schirm, indem man in 200mm Abstand vom Spalt eine Linse $f=200\text{mm}$ einsetzt.

Die Versuche mit dem Spalt zeigen die charakteristischen Eigenschaften der Beugung:

- Die Information über das Objekt ist im Winkel der Wellenfelder zum Primärstrahl, der Intensität der unterschiedlichen Maxima, und der Phase zwischen den Wellenzügen enthalten. Auf einem Schirm kann nur der Winkel und die Intensität beobachtet werden. Bei Verschiebung des Spalts bleiben Winkel und Intensität auf dem Schirm unverändert: Die Translation des Objekts ändert nur die Phase zwischen den Wellen.
- Der Abstand im Objekt (Spaltbreite a), von dem die Beugung ausgeht, ist *reziprok* zur Breite den Abständen im Beugungsbild, d.h. ein *schmaler* Spalt erzeugt ein Beugungsbild mit *breiten* Maxima und umgekehrt. Für die Winkel der Wellenfelder zur Richtung des Primärstrahls gilt $\sin \theta \sim \lambda / a$.

- Von *einem einzigen* Objekt, dem Spalt, gehen *viele Beugungsmaxima* aus, deren Intensität allerdings mit zunehmendem Winkel zum Primärstrahl abnimmt.

Versuch 4 *Beugung am Gitter. Das Beugungsbild des Einzelspalts ist unterteilt.*

Auch die Intensitätsverteilung der Beugung am Gitter kann mit der Fourier Technik berechnet werden (http://www.uni-tuebingen.de/uni/pki/skripten/V8_4AGitter.DOC).

8.4.3.1 Beugung am periodischen Gitter eines Kristalls

Kristalle sind natürliche Objekte, die aus identischen Elementarzellen aufgebaut sind. Im Beugungsbild des Gitters der Atome ist die Intensität, wie für alle Gitter mit vielen Zellen, auf einzelne, scharfe Punkte konzentriert.

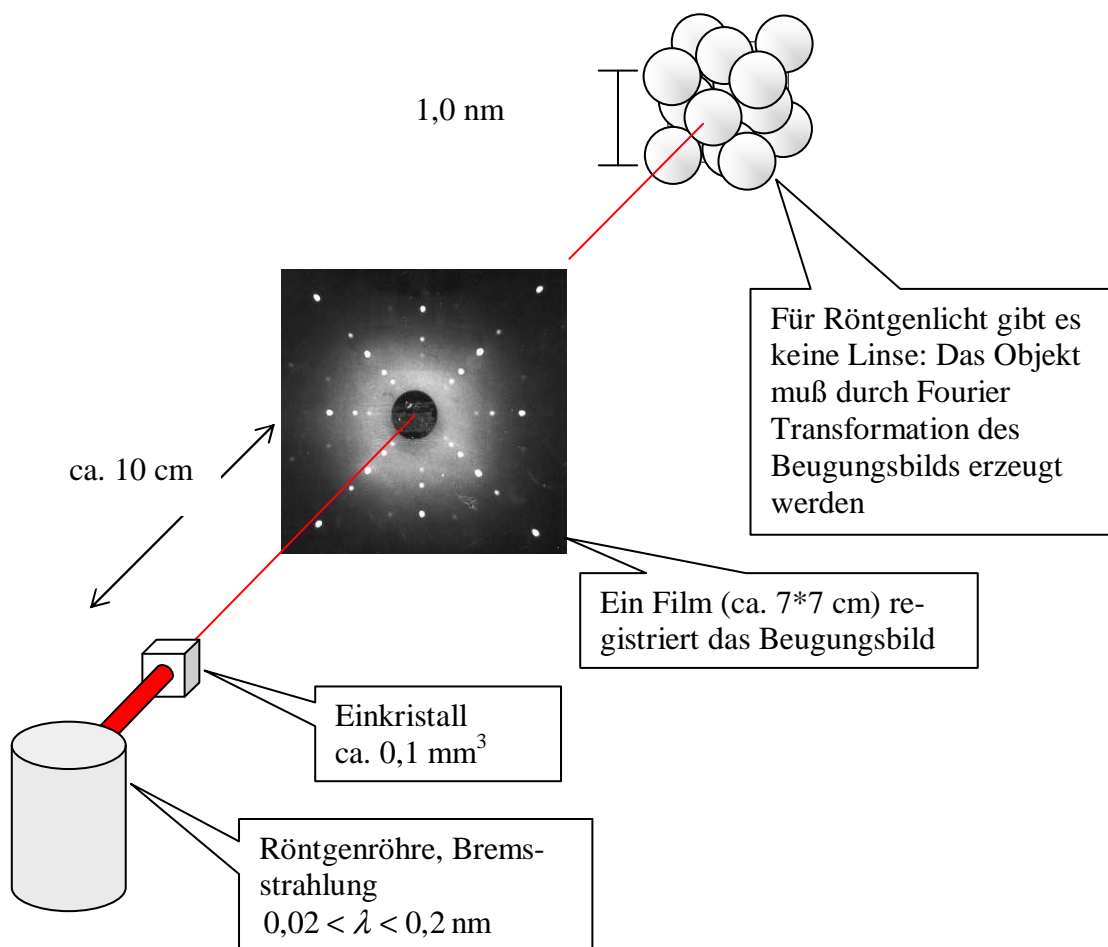


Abbildung 4 Beugungsbild eines kubischen Kristalls, K_2SnCl_6 , Gitterkonstante $1,0 \text{ nm}$, aufgenommen in Richtung der 4-zähligen Achse in Laue Geometrie, und Schema der Bildentstehung. Der Kristall ist zu groß gezeichnet, er wird in Wirklichkeit vom Strahl umspült. Das Kristallmodell zeigt ein flächenzentriertes Gitter.

Zur Beugung an Kristallen benutzt man Röntgen- Elektronen- oder Neutronenstrahlen mit Wellenlänge von etwa $0,1 \text{ nm}$, die den Abständen zwischen den Atomen entspricht. Die Wellenlänge des sichtbaren Lichts von 380 bis 780 nm ist für diese Art der Beugung zu groß. Das Beugungsbild entsteht analog zur Optik, das Bild des Objekts muß aber -mangels Linse für

die Röntgenstrahlung- durch Fourier-Transformation der Beugungsdaten errechnet werden. Die Abstände im Gitter sind gegenüber den Abständen zwischen Kristall und Empfänger, z. B. einem Film, so klein, daß immer im Fernfeld beobachtet wird. Das Beugungsbild liefert nur Richtungen und Intensitäten, deshalb müssen die Phasen abgeschätzt werden. Dafür gibt es einige spezielle Methoden.

(Mathemat. Behandlung: http://www.uni-tuebingen.de/uni/pki/skripten/V8_4AKristall.DOC).

8.4.4 Beugung im Fern- und Nahfeld: Einfluss einer Linse

Stellt man im Beugungsversuch am Spalt den Schirm immer näher an den Spalt, dann kommt man schließlich in einen Bereich, indem sich die zu den unterschiedlichen Beugungsordnungen führenden Wellen überlagern. Man erkennt die Form des Spalts, umrandet von Beugungssäumen. Auf einem Schirm in der Brennebene einer Linse kann man auch in diesem Nahbereich die Beugung rein beobachten: Die Linse fokussiert die sich kreuzenden, zu den einzelnen Ordnungen führenden parallelen Strahlenbündel auf den in der Brennebene stehenden Schirm. *Man sieht also in der Brennebene der Linse das, was man in größerer Entfernung auch ohne Linse beobachtet.*

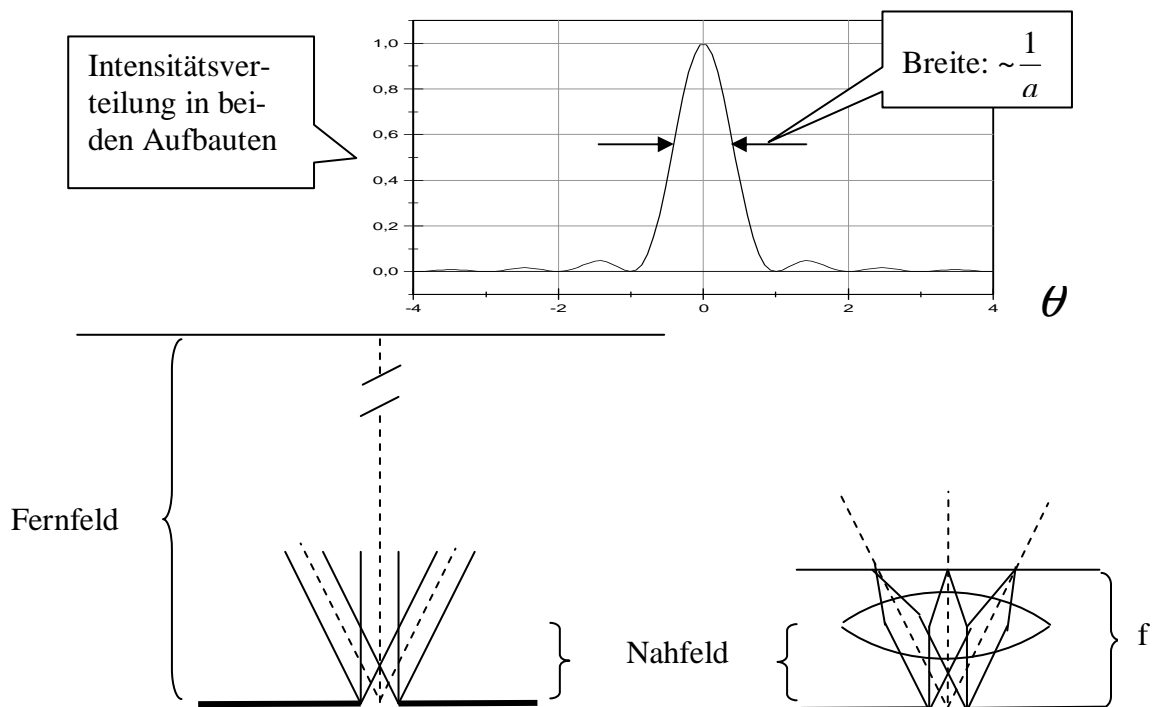


Abbildung 5 Beugung am Spalt bei unterschiedlichem Abstand des Beobachtungsschirms vom Objekt. Mitte: Intensitätsverteilung im Beugungsbild in Abhängigkeit vom Beugungswinkel θ . Schema unten links: Beobachtung ohne Linse im Fernfeld. Unten rechts: Im Nahfeld kann das Beugungsbild mit einer Linse „hergeholt“, d.h. auf den Schirm in ihrer Brennebene abgebildet werden. (Links „Fraunhofersche“, rechts „Fresnelsche“ Beugung).

Im Gegensatz zur Abbildung sind zur Beugung im allgemeinen keine Linsen oder irgendwelche optischen Geräte nötig. „Fraunhofersche“ und „Fresnelsche“ Beugung beschreiben den gleichen physikalischen Effekt, der, in Abhängigkeit vom Verhältnis zwischen Spaltbreite und Schirmabstand, in Fern- und Nahfeld unterschiedlich erscheint. Im folgenden ist immer die Beugung ohne Linse in genügend großer Entfernung vom Schirm gemeint.

Eine Abschätzung für das Verhältnis von Spaltbreite und dem erforderlichen Abstand für einen Schirm, auf dem das Beugungsbild im Fernfeld, also ohne Linse beobachtbar ist, steht in http://www.uni-tuebingen.de/uni/pki/skripten/V8_4AFernfeld.DOC.

8.4.5 Das Auflösungsvermögen optischer Geräte

Die Theorie nach Helmholtz (1874) untersucht die Auswirkung der *Beugung an der Blende* auf die Auflösung des Systems. Zwei gegeneinander verkippte Wellenfelder werden unterhalb eines bestimmten Kippwinkels als nur eine Welle wahrgenommen. Die Quellen beider Felder sind unabhängig voneinander, ihr Licht ist im allgemeinen inkohärent.

Die Theorie von Abbe fragt nach der Auswirkung der Beugung am Objekt: Es folgt, dass für eine Abbildung noch mindestens die erste Ordnung des *Beugungsbilds des Objekts* in das Objektiv treffen muss. Das von der gleichen Primärwelle am Objekt angeregte Licht zu unterschiedlichen Beugungsordnungen ist kohärent.

8.4.5.1 Theorie von Helmholtz für den kleinsten Winkel zwischen zwei ebenen Wellen (z. B. von weit entfernten leuchtenden Punkten)- das Auflösungsvermögen des Auges

Betrachtet man den Sternenhimmel, dann fällt von jedem Stern nur eine einzige ebene Welle mit parallel liegenden Wellenfronten in unsere als kreisförmige Eintrittsblende wirkende Pupille. Von der mit Sternenlicht beleuchtete Pupille mit etwa 2 mm Durchmesser entsteht dadurch ein Beugungsbild, deren erste Nullstelle im Winkel von

$$\theta \approx \sin \theta = \frac{1,22 \cdot \lambda}{a} = \frac{1,22 \cdot 500 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-3}} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0,017^\circ$$

erscheint. (Die Fourier Transformierte einer Kreisblende ist die 1. Besselfunktion, daraus ergibt sich diese Bedingung für die erste Nullstelle, analog zur Bedingung für die Nullstellen bei der Beugung am Spalt, http://www.uni-tuebingen.de/uni/pki/skripten/V8_4ASpalt.DOC).

Ohne Linse wäre das Beugungsbild im Fernfeld auf einem Schirm im Abstand von etwa 5 m hinter der Pupille sichtbar. Im Auge liegt in 24 mm Entfernung hinter der Pupille, also im Nahfeld, die Netzhaut. Auf ihr entstünde ein 2mm großer Lichtfleck mit Beugungssäumen.

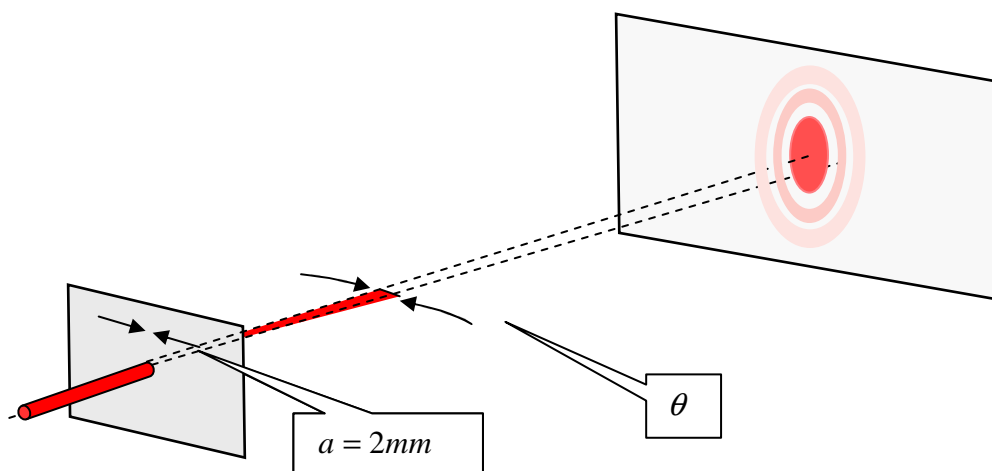


Abbildung 6 Beugungsbild der als Blende wirkenden Pupille auf einem entfernten Schirm und Winkel vom Zentralstrahl zur ersten Nullstelle

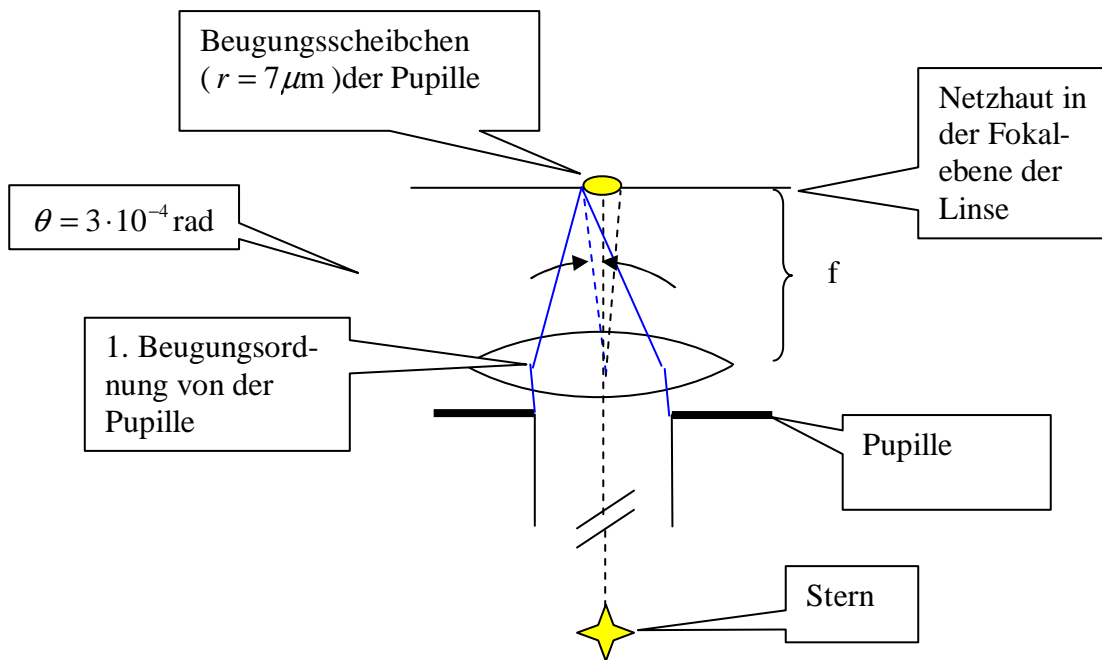


Abbildung 7 Beugungsfigur der Pupille mit Linse bei einer einzigen ebenen Primärwelle, etwa dem Licht von einem Stern.

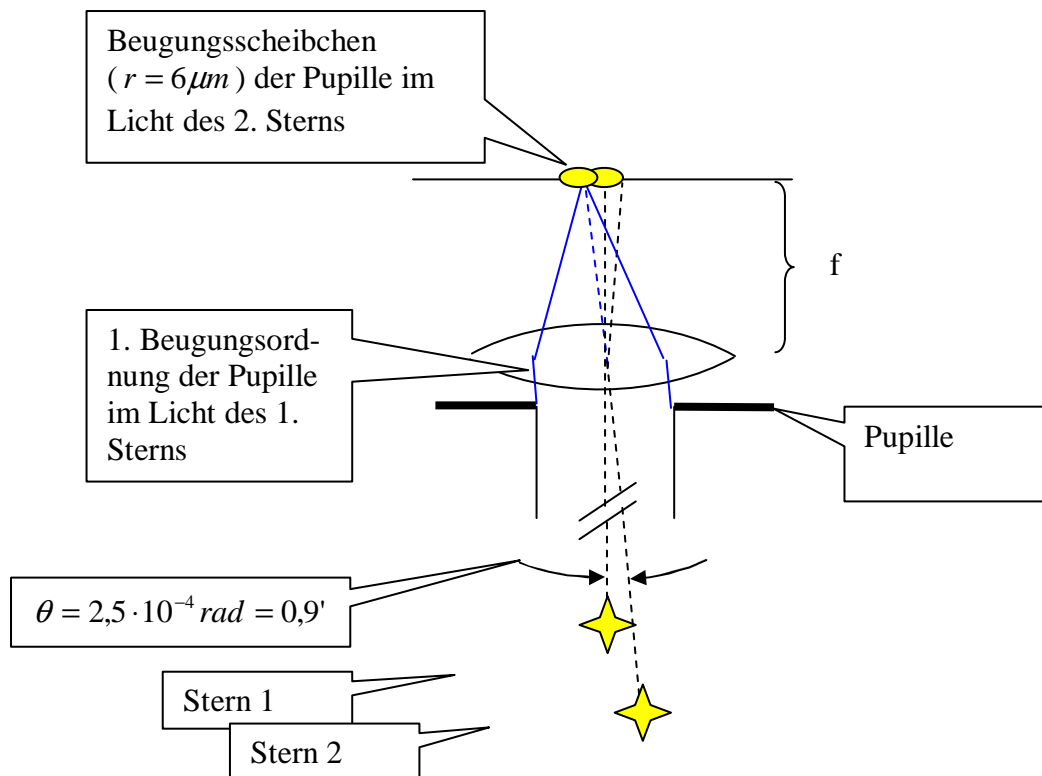


Abbildung 8 Grenze der Auflösung für zwei weit entfernte Objekte: Sie erscheinen getrennt, wenn zwischen ihren Beugungsbildern mindestens ein Minimum der Intensität liegt.

Die Linse im optischen System fokussiert parallel einfallende Strahlen auf einen einzigen Punkt in der Brennebene. Wegen der Beugung an der Blende werden der Linse aber außer dem Wellenfeld zum zentralen Strahl, der 0. Ordnung der Beugung, noch die dazu im Winkel von $\theta = 3 \cdot 10^{-4}$ rad verkippten Wellen der 1. Beugungsordnung angeboten. Auf der Netzhaut, in 24mm Entfernung von der Blende, fokussiert dieses Wellenfeld im Abstand von $r = 24 \cdot 3 \cdot 10^{-4} [\text{mm}] = 7 \mu\text{m}$ zum Fokus des zentralen Strahls. Der Winkel vom Betrachter zu zwei Punkten muss also mindestens $\theta = 3 \cdot 10^{-4}$ rad = $0,017^\circ$ betragen, damit sie mit „getrennten Beugungsscheibchen“ als zwei Punkte erscheinen. (Z. B. zwei Punkte in 10m Entfernung mit mindestens 3 mm Abstand).

Ein einziges parallel einfallendes Strahlenfeld erzeugt deshalb anstelle des idealen einzelnen Punktes ein Scheibchen von $7 \mu\text{m}$ Durchmesser auf der Netzhaut. Die Evolution hat diese Tatsache berücksichtigt, indem der mittlere Abstand der Sehzellen gerade dem Durchmesser der Scheibchen entspricht. Die Rasterung des Bildes ist der Auflösung des gesamten Systems also optimal angepaßt.

8.4.5.2 Theorie von Abbe für den kleinsten Abstand zwischen zwei Strichen

Das „Kapital“ für die Abbildung sind die Strahlen zu den unterschiedlichen Ordnungen, die, hinter der Linse zusammengeführt, das Objekt rekonstruieren. Am Spalt wurde deutlich, daß die Information über das Objekt, hier Form und Breite a des Spalts, in Intensität und Breite ($\sim 1/a$) der einzelnen Ordnungen steckt. Um wenigstens die Breite zu erkennen, muß neben der 0. Ordnung noch mindestens die erste Nullstelle bei

$$a \cdot \sin \theta = \lambda$$

in die Linse fallen. Mit anderen Worten: Der kleinste Abstand a , den zwei Objekte (hier die beiden Spaltkanten) haben dürfen, damit sie durch eine Linse getrennt wahrgenommen werden, ist daher

$$a = \lambda / \sin \theta$$

wenn der Winkel θ der vom Objekt aus gesehene halbe Öffnungswinkel der Linse ist.

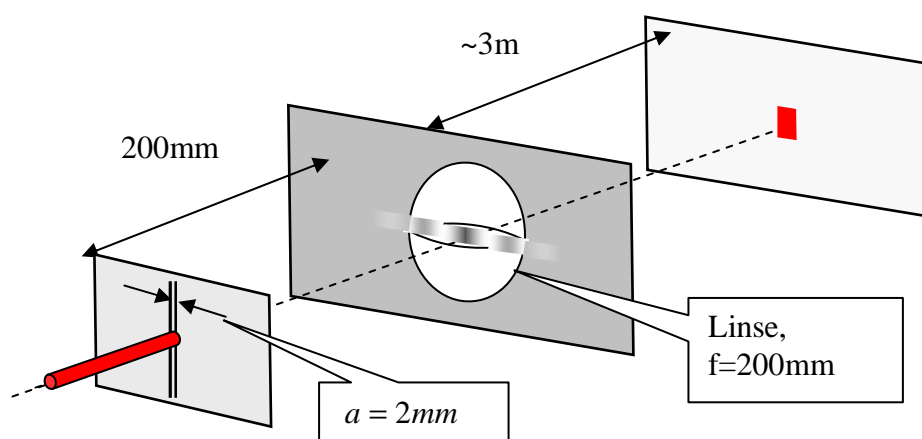


Abbildung 9 Zur Auflösung einer Linse: Ein Laserstrahl trifft auf einen Spalt. Die Linse steht anstelle des Schirms und „sieht“ das Beugungsbild. Rechts dahinter der Schirm mit der Abbildung des Spalts, falls mehr als der Zentralstrahl in die Linse trifft.

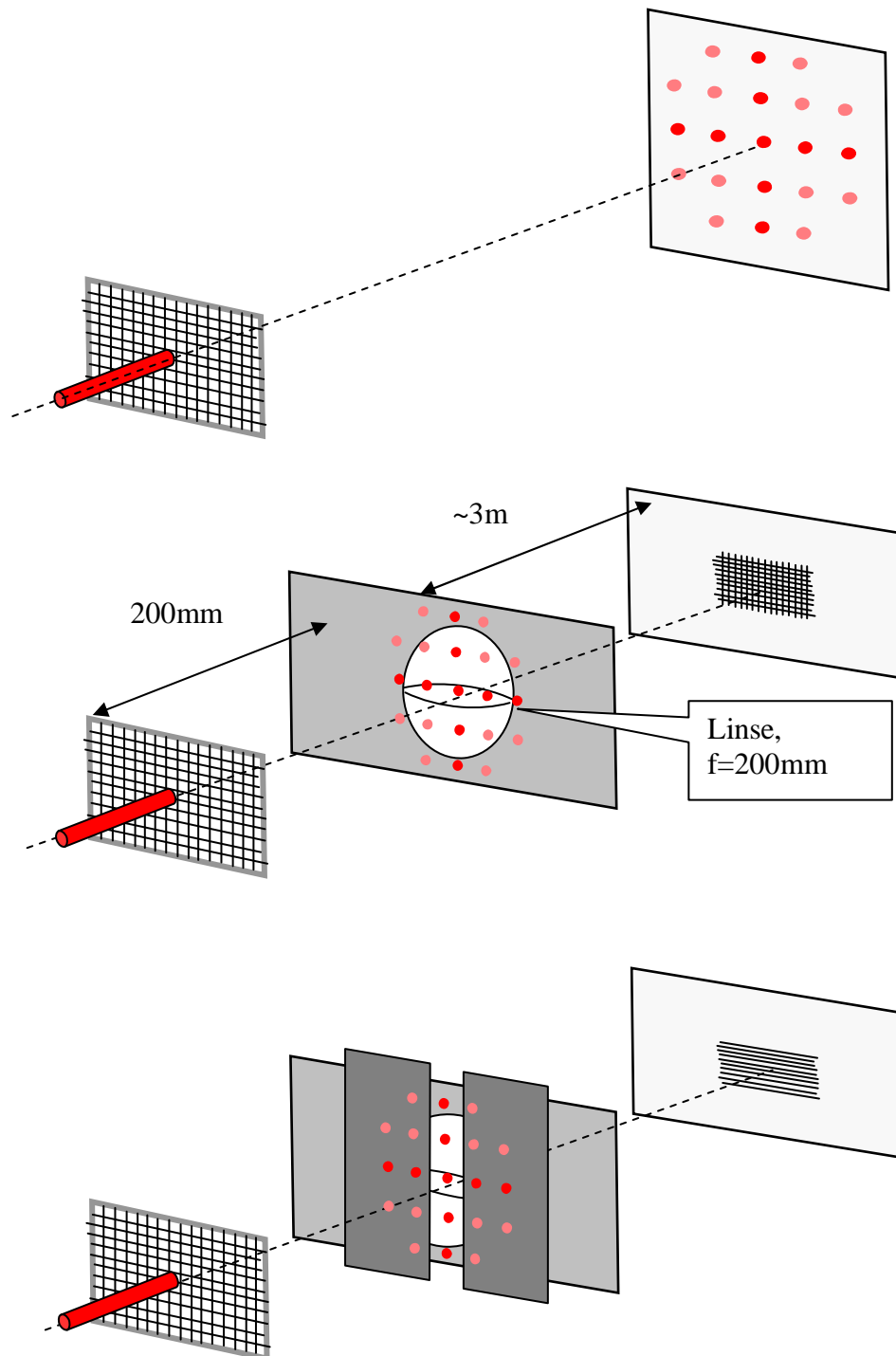


Abbildung 10 Zur Abbe Theorie: Vom Beugungsbild eines Gitters wird alles bis auf eine vertikale Reihe ausgeblendet. Die Information über die vertikalen Stäbe, ihr Abstand, fehlt: In der Abbildung sind sie verschwunden.

Versuch 5 Man betrachtet ein Gitter mit 100 Drähten/cm auf einem ca. 3 m hinter dem Gitter liegenden Schirm in Beugung. Danach mit einer $f=200$ Linse 200mm hinter dem Gitter in Abbildung. Mit einem vertikalen Spalt werden alle Teile des Beugungsbilds bis auf eine vertikale Punktreihe ausgeblendet. Die Abbildung mit der Linse zeigt nur noch die horizontalen Drähte.

8.4.6 Das Babinet Prinzip

Das Babinet Prinzip besagt, daß außerhalb des Primärstrahls die Beugungsbilder von einem lichtdurchlässigen Objekt und seinem „Negativ“ mit invertierter Durchlässigkeit gleich sind. Man erkennt daran, daß das Beugungsbild nicht die ganze Information über das Objekt enthält. Die Phase der unterschiedlichen Ordnungen ist für die Abbildung wichtig, weil am Ort des Bildes die Amplituden der Wellen mit ihren jeweiligen Phasen summiert werden. Die Phase ist aber in der Intensität des Beugungsbilds nicht zu erkennen.

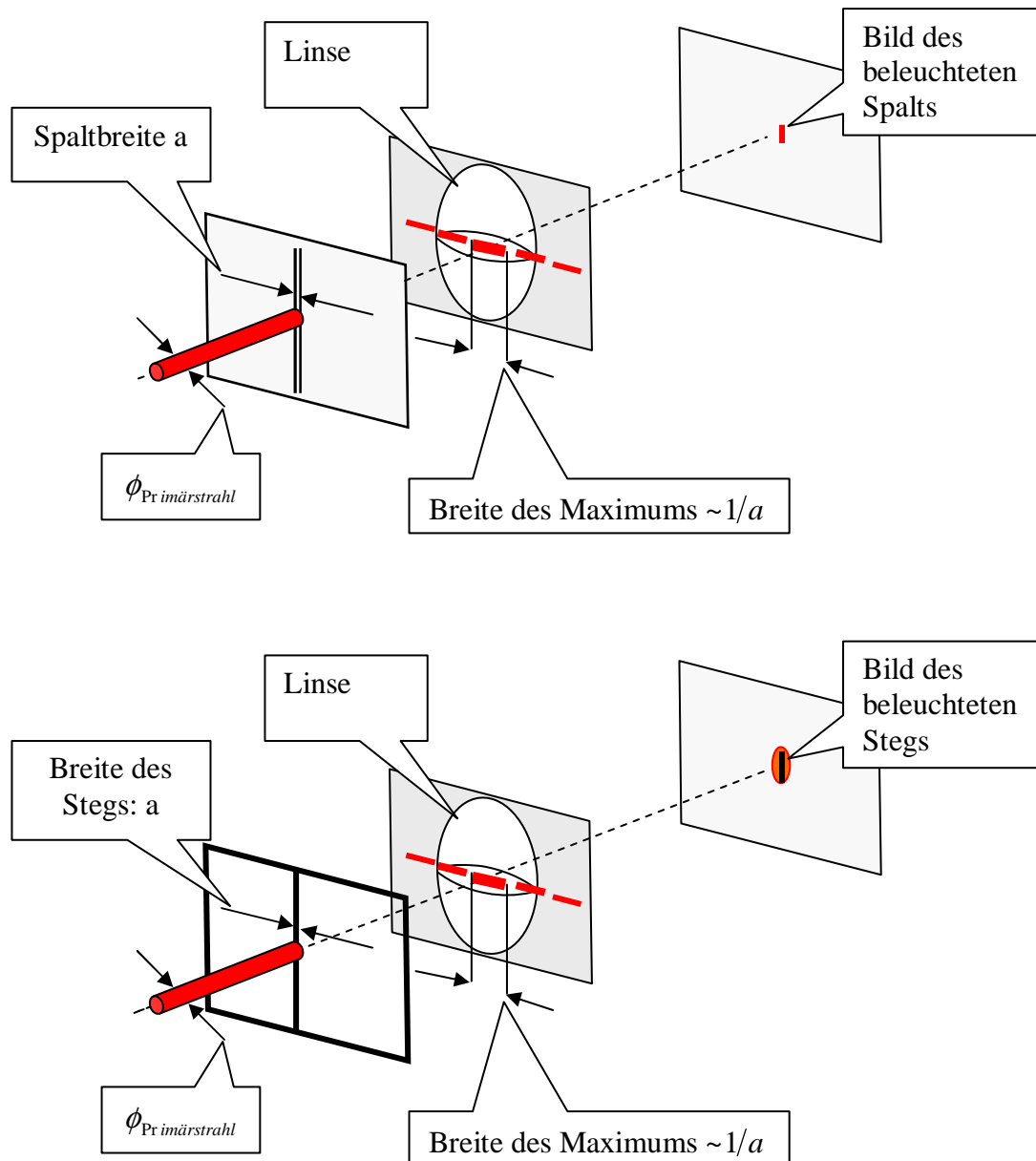


Abbildung 11 Zum Babinet Prinzip: Der Spalt und der Steg zeigen im Bereich außerhalb des Primärstrahls das gleiche Beugungsbild. Das Beugungsbild ist auf der Linse eingezeichnet, die Abbildung hinter der Linse zeigt die Unterschiede der Objekte.

Versuch 6 Ein Spalt und ein Steg werden abwechselnd in Beugung und in Abbildung beobachtet. Man sieht, daß sich die Beugungsbilder praktisch nicht unterscheiden.

Versuch 7 Beugung am Reflexionsgitter mit Rowlandkreis. Man erkennt im Licht der Hg Lampe, daß auch UV Anteile gebeugt werden. Nachweis mit optischen Aufhellern.

Versuch 8 Man betrachte durch ein quadratisches Gitter von etwa $5 \mu\text{m}$ Maschenbreite (Spielzeug, ca. 1,50 DM) eine Lichtquelle. Das Gitter zerlegt das Licht spektroskopisch. a) Vergleichen Sie eine natürliche mit einer Metaldampfquelle, betrachten Sie dazu z. B. die Straßenbeleuchtung, Autobeleuchtungen etc. b) Leuchten sie mit einem Laser-Pointer durch das Gitter: Sie sehen das Beugungsbild des Gitters. Bewegen Sie das Gitter in Translation und Rotation und betrachten Sie die Reaktion des Beugungsbilds: Bei der Verschiebung bleibt das Beugungsbild unverändert. Offensichtlich geht die Information über die Lage des Objekts bei Beobachtung der Intensität der Beugung verloren!

Eine besonders einfache Art der Abbildung bietet die Lochkamera http://www.uni-tuebingen.de/uni/pki/skripten/V8_4ALochkamera.DOC



Abbildung 12 „Sonnentaler“: Die hellen, schwach belichteten Flecken sind Abbildung der Sonne an den Löchern eines Blätterdachs