Vorlesung Experimentalphysik I am 22.11.1999 und 23.11.1999 J. Ihringer

1.10 Winkelgeschwindigkeit, Drehimpuls und Drehmoment

In Analogie zu Impuls und Kraft für die Bewegung auf geradlinigen Bahnen sind speziell für Drehbewegungen die Vektoren für die *Winkelgeschwindigkeit*, den *Drehimpuls* und das *Drehmoment* definiert, alle liegen *in Richtung der Drehachse*. Diese „axialen“ Vektoren behalten ihre Richtung bei, solange die Drehachse und der Drehsinn unverändert bleibt: Im Gegensatz dazu ändern Bahngeschwindigkeit, Bahnimpuls und die Kräfte auf einen Massenpunkt bei einer Drehbewegung ständig ihre Richtung.

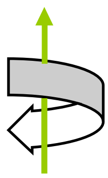
<table>
<tr><th colspan="2">Formel</th><th>Anmerkung</th></tr>
<tr><td colspan="2">$\vec{v} = \vec{\varpi} \times \vec{r}$</td><td rowspan="2">Winkelgeschwindigkeit $\vec{\varpi}$, Bahngeschwindigkeit $\vec{v}$, $\vec{r}$ Vektor vom Beobachtungspunkt zur Bahn</td></tr>
<tr><td>$\varpi = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{r} \cdot \sin\alpha$</td><td>$[\vec{\varpi}] = \frac{1}{\mathrm{s}}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}$</td><td rowspan="2">Drehimpulse $\vec{L}$,
Bahnimpuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$</td></tr>
<tr><td>$L = r \cdot p \cdot \sin\alpha$</td><td>$[L] = 1\,\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F} = m \cdot \vec{r} \times \vec{a}$</td><td rowspan="2">Drehmoment $\vec{T}$
Kraft an der Bahn $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$</td></tr>
<tr><td>$T = r \cdot F \cdot \sin\alpha$</td><td>$[\vec{T}] = 1\,\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = 1\mathrm{Nm}$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Der Drehsinn der axialen Vektoren ist gemäß der „Korkenzieher-Regel“ vereinbart</td></tr>
</table>

Tabelle 1 Winkelgeschwindigkeit, Drehimpuls und Drehmoment

Meistens werde diese Größen zur Beschreibung von Kreisbewegungen eingesetzt. Man erkennt aber an der Formel und an der Zeichnung, daß auch ein auf einer geradlinigen Bahn mit Impuls $\vec{p}$ an einem Beobachtungspunkt vorbeiziehender Massenpunkt, der Ortsvektor sei $\vec{r}$, einen Drehimpuls $\vec{L}$ zeigt. Der Drehimpuls verschwindet nur dann, wenn der Beobachtungspunkt auf der Bahn liegt, weil in diesem Fall $\vec{r} \times \vec{p}$ immer 0 ist. Entgegen dem Impuls bei geradliniger Bewegung ist also der Drehimpuls mit Bezug auf den Beobachtungspunkt definiert.

Das Drehmoment wird, analog zur Kraft, im Bezug auf *statische* und *dynamische* Vorgänge eingesetzt. Die klassische Anwendung in der Statik ist das Hebelgesetz, ein Thema der „Mechanik des starren Körpers“, weil es mehr als einen Massenpunkt betrifft. Wie beim Drehimpuls trägt auch zum Drehmoment nur die Kraft-Komponente senkrecht zum Radiusvektor bei. Komponenten in Richtung des Radiusvektors, z. B. die Zentripetalkraft, werden im Drehmoment nicht erfaßt.

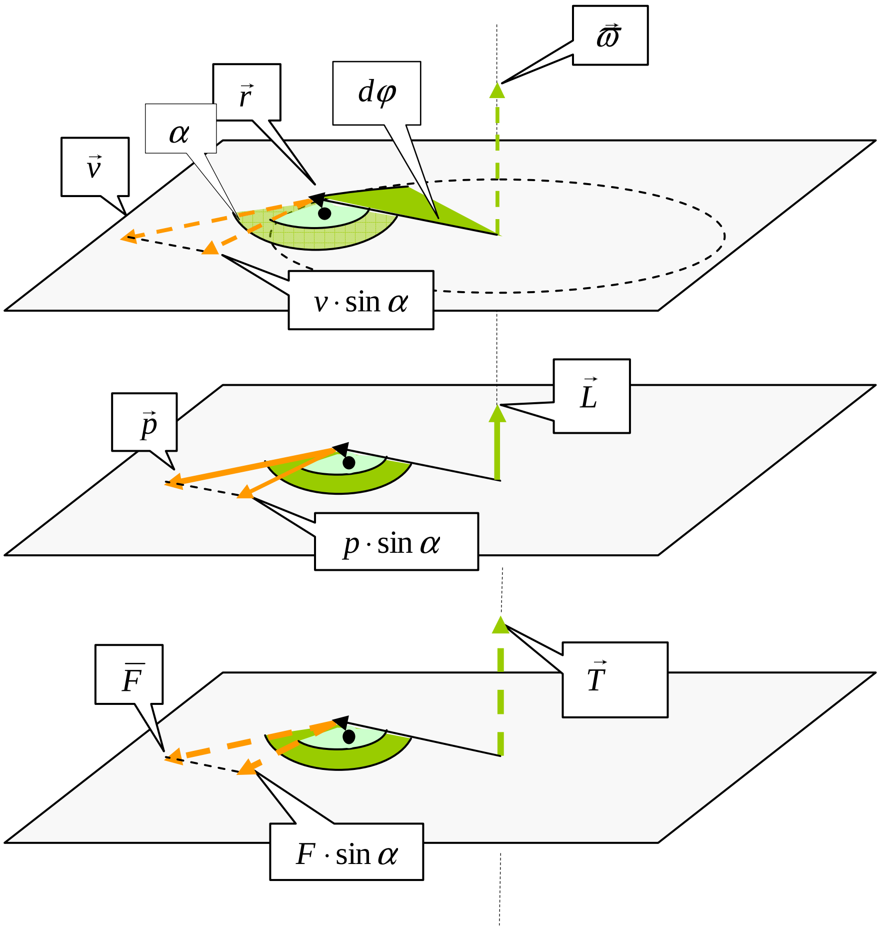


Abbildung 1 Vektoren der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\varpi}$, des Drehimpulses $\vec{L}$ und des Drehmoments $\vec{T}$ (gelbgrün) und die dazu gehörenden Vektor der Bahngeschwindigkeit $\vec{v}$, des Bahnimpulses $\vec{p}$ und der Kraft $\vec{F}$ tangential zur Bahn (orange), im Winkel α (grün) zum Radiusvektor. $d\varphi$ zeigt den vom Radiusvektor in der Zeit dt überstrichenen Winkel.

1.10.1 Bewegung auf der Kreisbahn

Bei der Bewegung auf der Kreisbahn stehen die Vektoren in Bahnrichtung immer senkrecht zum momentanen Radiusvektor $(\alpha = 90^0)$, deshalb wird das Vektorprodukt zur normalen Multiplikation zwischen Radius und dem Betrag der tangential zur Bahn gerichteten Größe.

Speziell: Bewegung auf der Kreisbahn	
$v = \varpi \cdot r$	Bahn- (v) und Winkelgeschwindigkeit (ϖ)
$L = r \cdot m \cdot v = m \cdot r^2 \cdot \varpi$	Drehimpuls
$T = \frac{dL}{dt} = m \cdot r^2 \cdot \dot{\varpi}$	Drehmoment, zeitliche Ableitung des Drehimpulses

Tabelle 2 Bahngeschwindigkeit, Drehimpuls und Drehmoment bei der Bewegung auf der Kreisbahn

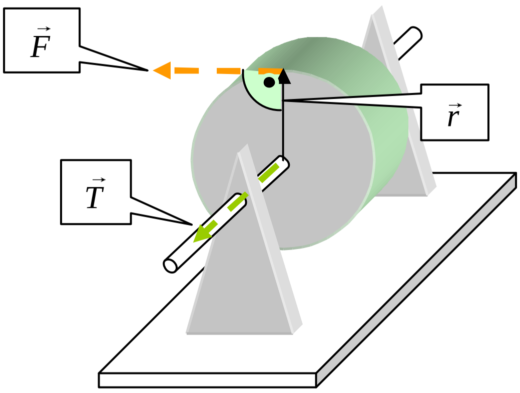


Abbildung 2 Drehmoment (gelbgrün) und entsprechende Kraft in Bahnrichtung (orange) bei der beschleunigten Kreisbewegung: $\dot{\vec{\omega}} \neq 0$. Man denke z. B. an die Beschleunigung einer Drehung durch abziehen eines zuvor aufgewickelten Seils.

1.10.2 Der Drehimpulserhaltungssatz

Ohne äußere Drehmomente ist der gesamte Drehimpuls eines Systems nach Betrag und Richtung zeitlich konstant. Das ist die Aussage des Drehimpulserhaltungssatzes, in völliger Analogie zum Impulserhaltungssatz für geradlinige Bewegung.

$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = const$	Der Drehimpuls $\vec{L}$ eines Systems, die Summe der Drehimpulse $\vec{L}_i$ der einzelnen Teile des Systems, ist zeitlich konstant

Tabelle 3 Der Drehimpulserhaltungssatz

Das erste und zweite Keplersche Gesetz folgt unmittelbar aus der Erhaltung des Drehimpulses. Die Richtung des Drehimpulses bleibt konstant, deshalb bewegt sich ein Körper in einer Ebene senkrecht zum Vektor des Drehimpulses. Das Vektorprodukt zwischen pro Zeit gefahrenem Bahnelement und Radiusvektor ist, geometrisch gedeutet, die von beiden Vektoren aufgespannte Fläche, also das doppelte der „vom Fahrstrahl überstrichenen“ Fläche des zweiten Kepler-Gesetzes.

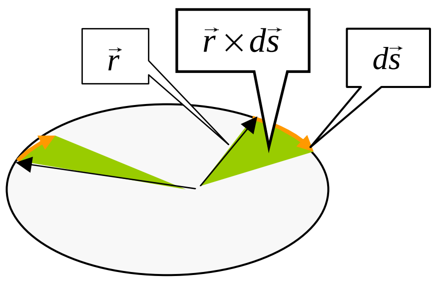
$\vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v} = m \cdot \frac{\vec{r} \times d\vec{s}}{dt}$	Drehimpuls
	Konstanter Betrag des Drehimpulses heißt, daß die pro Zeiteinheit überstrichenen Flächenelemente $\vec{r} \times d\vec{s}$ (gelbgrün) konstant sind: „In gleichen Zeiten überstreicht der Fahrstrahl gleiche Flächen“

Tabelle 4 Drehimpulserhaltung und das 1. und 2. Keplersche Gesetz. Die Radiusvektoren (schwarz) variieren in der Länge (Ellipse), ebenso die pro Zeit zurückgelegte Bahn (orange).

Versuch 1 Drehimpulserhaltung auf dem Drehschemel. Einem Experimentator auf einem Drehschemel wird von außen ein rotierendes Rad überreicht. In Abhängigkeit von der Orientierung der Drehachse bei Übergabe des Rades dreht sich der Schemel bei Bewegung des Rades, weil der Drehimpuls erhalten bleibt. Der Schemel mit Experimentator wird nach unterschiedlichen Anfangsbedingungen zum abgeschlossenen System erklärt: 1.) Achse nach oben 2) Achse waagrecht 3) Start des Rades auf dem Schemel

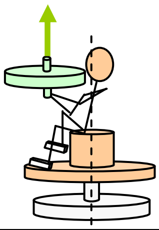
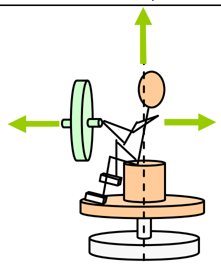
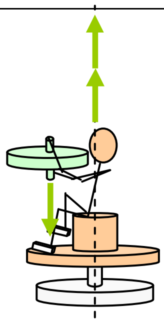
Situation	Drehimpulse		
	Rad	Schemel	Rad+Schemel
	↑		↑
	←	↑→	↑
	↓	↑↑	↑

Tabelle 5 Drehimpulserhaltung auf dem Drehschemel, das sich drehende Rad wird mit der Achse in der Vertikalen dem Mann auf dem gebremsten Schemel übergeben: Der Drehimpulsvektor des Systems Rad+Schemel zeigt nach oben.

Der Satz von der Erhaltung des Drehimpulses, der Impuls- und der Energieerhaltungssatz sind die Erhaltungssätze der Physik. Die mathematische Struktur der diese Sätze beschreibenden Gleichungen zeigt, daß ihnen grundlegende Eigenschaften unserer Umgebung zu Grunde liegen: Die Gleichberechtigung aller Richtungen, aller Orte und aller Zeiten (Theorie dazu: http://www.uni-tuebingen.de/uni/pki/skripten/Dank.DOC - Landau). Weitere Erhaltungssätze gibt es nur noch für die Ladung, die Zahl der Elementarteilchen und einige ihrer Eigenschaften.

2 Mechanik starrer Körper

2.1 Starre Körper, Freiheitsgrade

In den vorhergehenden Paragraphen wurde ein Körper unabhängig von seiner Form zu einem Massenpunkt abstrahiert und dessen Lage durch drei kartesische Koordinaten festgelegt. Die Lage eines realen Körpers im statischen oder dynamischen Gleichgewicht, etwa bei einer *Kreiselbewegung*, hängt aber von der *räumlichen Verteilung seiner Masse* ab. Bleibt diese Verteilung bei der Bewegung unverändert, dann spricht man von der Mechanik eines starren Körpers.

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichung könnte man einen beliebig geformten Körper in einzelne Massenpunkte zerlegen. Mit Energie- und Impulserhaltungssatz und mit der Randbedingung der gleichbleibenden relativen Lage der Massenpunkte zueinander könnte man ein Gleichungssystem aufschreiben und dieses lösen. Die Behandlung von solchen „Mehrteilchenproblemen" ist aber sehr aufwendig. Jeder Massenpunkt bringt drei Koordinaten mit in die Rechnung, deshalb sind bei N Massenpunkten 3N Parameter zu bestimmen. Glücklicherweise ist das unnötig. Für die Bewegungsgesetze bei geradliniger Bewegung kann ein beliebig geformter Körper durch einen Massenpunkt an einem bestimmten Ort, dem *Schwerpunkt des Körpers*, ersetzt werden. Zur Berechnung der Dynamik bei Drehbewegungen wird das *Trägheitsmoment* eingeführt.

Volle Breitseite: Schleudern mit dem Reisebus

Wenn sich 18 Tonnen drehen, hilft kein Abfangen mehr

20 km/h reichen meist völlig aus, um einen Reisebus haltlos in unkontrollierbare Fahrt zu bringen: „Wenn ein 18 Tonnen schwerer Bus anfängt, sich zu drehen, sind Pkw-ähnliche Abfangübungen in aller Regel wirkungslos", erklärt Gatermann die praktischen Auswirkungen der Fahrphysik.

Abbildung 3 Aufgrund der unterschiedlichen Trägheitsmomente unterscheidet sich die Fahrphysik von Bus und PKW vor allem bei Drehbewegungen. Bei geradliniger Fahrt verhalten sich beide annähernd gleich (FAZ 26.10.99, Seite T5)

Drei Koordinaten für die Schwerpunktlage und drei Winkel für die Orientierung genügen, um Ort und Richtung eines starren Körpers festzulegen. Die Zahl der unabhängigen Parameter (hier 6) zur physikalischen Beschreibung eines Systems heißt „Anzahl der Freiheitsgrade".

2.2 Statik des starren Körpers

Schwerpunkt, Gleichgewicht

Wirkt eine Kraft auf einen Massenpunkt, dann wird er - gemäß dem 2. Newtonschen Axiom - geradlinig beschleunigt. Greift eine Kraft aber an einem beliebigen Punkt *eines beliebig geformten Körpers* an, dann beginnt der Körper sich in Kraftrichtung zu drehen, gleichzeitig beginnt die geradlinige Beschleunigung. Die Überlagerung beider Bewegungen macht die mathematische Behandlung kompliziert. Man sucht deshalb nach einem Punkt, an dem eine Kraft angreifen kann, ohne ein Drehmoment auszuüben. Dieser Punkt ist der *Schwerpunkt*.

Zur Bestimmung des Schwerpunkts kann die Schwerkraft dienen. Legt man eine Drehachse durch den Körper, dann erzeugen die einzelnen Massen aufgrund der Schwerkraft ein resultierendes Drehmoment: Der Körper kippt aus seiner Lage. Verläuft die Achse durch den Schwerpunkt, dann bleibt der Körper ohne Drehmoment. Greift eine Kraft in diesem Punkt an, dann wird der Körper wie ein einziger Massenpunkt, an dem die gesamte Masse des Körpers vereinigt ist, nur geradlinig beschleunigt. Aber auch bei Drehungen ist dieser Punkt bevorzugt: Bezüglich der Achsen, die durch den Schwerpunkt verlaufen, sind die Trägheitsmomente minimal.

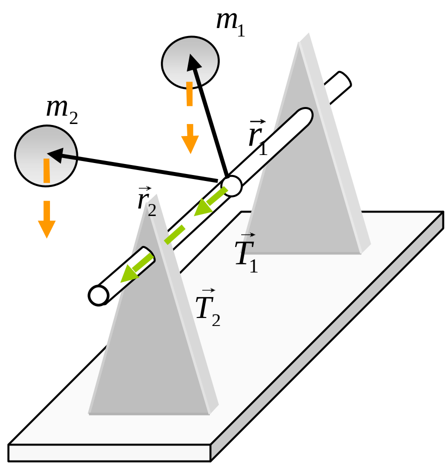
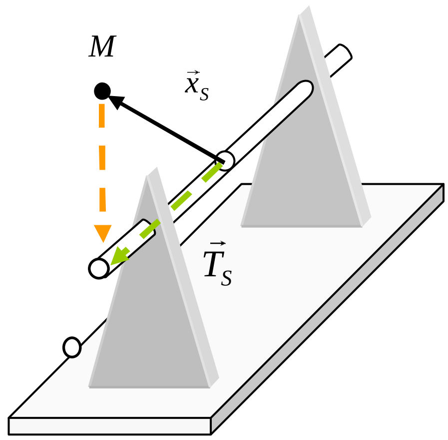
Einzelne Massenpunkte	Gesamtmasse im Schwerpunkt
	
Die Schwerkraft (orange) auf die an den Orten $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ liegenden Massen m_1, m_2 erzeugt an der Achse die Drehmomente $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ (grün), zusammen $\vec{T}_S = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$	Der Schwerpunkt $\vec{x}_S$ ist der Ort, an dem ein einziger Massenpunkt $M = m_1 + m_2$ liegen müsste, um an der Achse das gleiche Drehmoment $\vec{T}_S = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$ wie die beiden einzelnen Massen zu erzeugen.
$\vec{T}_S = \sum_{i=1}^{2} \vec{T}_i = \sum_{i=1}^{2} m_i \cdot \vec{x}_i \times \vec{g}$	$\vec{T}_S = M \cdot \vec{x}_S \times \vec{g}$

Tabelle 6 Drehmoment und Schwerpunkt auf einen Körper aus zwei Massen bei beliebiger Lage der Drehachse. Die Achse stehe senkrecht zur Zeichenebene.

$M \cdot \vec{x}_S \times \vec{g} = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{x}_i \times \vec{g}$	Das durch den Schwerpunkt auf die Achse ausgeübte Drehmoment ist gleich der Summe der Drehmomente der einzelnen Massen
$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$	
$\vec{x}_S = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{x}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$	„Ort des Schwerpunkts“: Vektor von der Drehachse zum Schwerpunkt

Tabelle 7 Vektor zum Schwerpunkt bezüglich einer beliebigen Drehachse.

Die Koordinaten des Schwerpunkts entsprechen dem für Verteilungen aus der Statistik eingeführten Mittelwert, das Trägheitsmoment der Standardabweichung (vgl. http://www.uni-tuebingen.de/uni/pki/skripten/Massen_Mittel.DOC)

2.2.1.1 Drehmoment-freie, stabile Aufhängung

Ein Körper hängt stabil, wenn sich alle Drehmomente der einzelnen Massen ausgleichen. Die Drehmomente entstehen bezüglich der Drehachse: Verläuft sie durch den Schwerpunkt, dann ist das resultierende Drehmoment aller Teile null, der Körper hängt stabil. Liegt die Achse außerhalb des Schwerpunkts, dann dreht sich der Körper, bis der Schwerpunkt senkrecht unter der Achse liegt. Steht der Schwerpunkt senkrecht über der Achse, dann ist eine Lage des labilen Gleichgewichts erreicht, z. B. bei der Schiffschaukel kurz vor dem Überschlag.

$M \cdot \vec{x}_S \times \vec{g} = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{x}_i \times \vec{g}$		Definition des Vektors zum Schwerpunkt
$0 = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{x}_i \times \vec{g}$		Bedingung für Gleichgewicht aller Drehmomente, Aufhängung ohne Drehmoment
Für die Lage des Schwerpunktes folgt		
$M \cdot \vec{x}_S \times \vec{g} = 0$		Die linke Seite wird Null, wenn das Vektorprodukt Null wird, das heisst:
1.	$\vec{x}_S = 0$	Der Vektor zum Schwerpunkt ist Null, d. h. die Achse liegt im Schwerpunkt
2.	$\vec{x}_S$ parallel zu $\vec{g}$	Die Drehachse liegt auf der Vertikalen durch den Schwerpunkt

Tabelle 8 Drehmoment-frei ist der Körper, wenn der Schwerpunkt auf der Drehachse oder auf der Vertikalen durch die Achse liegt.

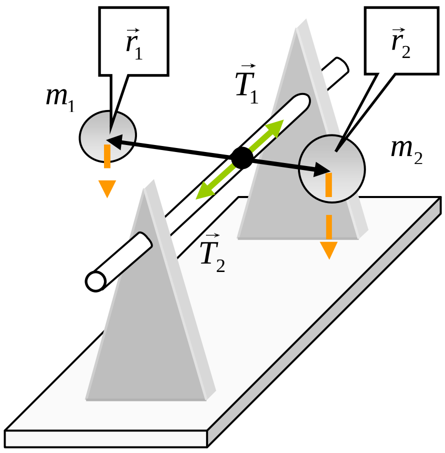


Abbildung 4 Die Massenverteilung ist bezüglich der Rotation im Gleichgewicht, wenn die Drehachse durch den Schwerpunkt verläuft. Orange: Schwerkräfte, grün: Drehmomente

Versuch 2 Bestimmung des Schwerpunktes einer unregelmäßig geformten Tafel. Die Tafel wird an zwei beliebigen, unterschiedlichen Punkten aufgehängt. Vom Aufhängepunkt wird jeweils das Lot nach unten gefällt. Der Schwerpunkt liegt im Schnittpunkt beider Lote.

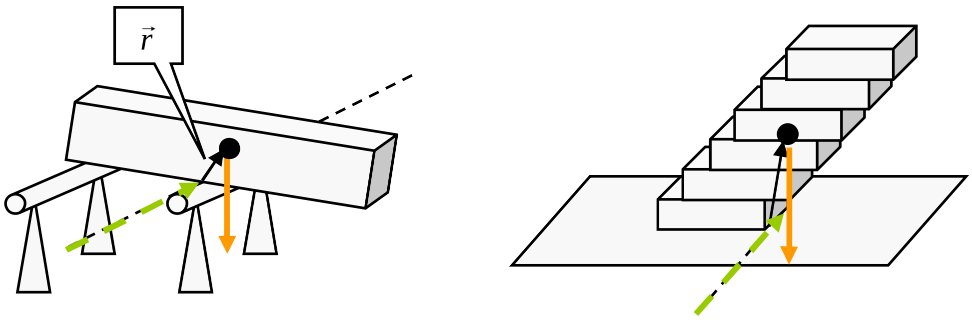


Abbildung 5 Die Drehung des Körpers beginnt, wenn der Schwerpunkt außerhalb der Stütze zu liegen kommt. Orange: Auf den Schwerpunkt wirkend Schwerkraft, grün: Drehmoment.

Zwei Stützen halten einen Körper nur dann, wenn der Schwerpunkt zwischen den Stützen liegt. Andernfalls dreht sich der Körper um eine waagrechte Achse, die auf der dem Schwerpunkt näheren Stütze liegt.http://www.uni-tuebingen.de/uni/pki/skripten/V1_10A_Stuetzen.DOC

Versuch 3 Der Schwerpunkt länglicher Gegenstände (z. B. eines Besens) wird durch Verschiebung zweier Stützen bestimmt.

Versuch 4 Das schiefe Haus. Es fällt um, wenn das Lot vom Schwerpunkt nach unten außerhalb der Auflagefläche zu liegen kommt. (Leitern sollte man deshalb immer festbinden!)

2.2.2 Die Hebelgesetze

Eine klassische Anwendung findet das statische Gleichgewicht in den Hebelgesetzen. An einer Stange, die an einem Punkt unterstützt ist, greifen zwei als „Kraft“ und „Last“ bezeichnete Kräfte an. Wenn die Stange ruht, dann addieren sich die Drehmomente am Hebel zu null. Dann gilt:

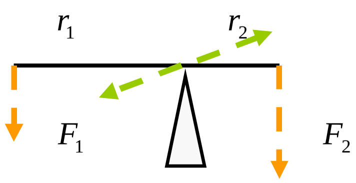
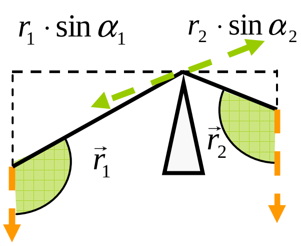
<table>
<tr><td colspan="3">Kräfte senkrecht zum Hebel:</td></tr>
<tr><td>$\vec{T}_1 = \vec{T}_2$</td><td rowspan="2">„Kraft mal Kraftarm = Last mal Lastarm“</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>$r_1 \cdot F_1 = r_2 \cdot F_2$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Beliebiger Winkel α_1 zwischen Kraft und Kraftarm und α_2 zwischen Last und Lastarm:</td></tr>
<tr><td>$\vec{T}_1 = \vec{T}_2$</td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$</td></tr>
<tr><td>$r_1 \cdot F_1 \cdot \sin\alpha_1 = r_2 \cdot F_2 \cdot \sin\alpha_2$</td></tr>
</table>

Tabelle 9 Das Hebelgesetz (Beachte bei beliebigem Winkel: $\sin(180 - \alpha_i) = \sin\alpha_i$*)*

Versuch 5 Gerader Hebel, Schiefer Hebel

In empfindlichen Waagen muß die Masse des Gestänges und der Abstand des Schwerpunktes von der Schneide möglichst klein, die Länge der Arme möglichst groß sein.(http://www.uni-tuebingen.de/uni/pki/skripten/V1_10A_Waage.DOC)

Versuch 6 Es wird die Variation der Empfindlichkeit der Waage bei Variation des Abstands x_S *vom Schwerpunkt bis zum Drehpunkt gezeigt.*

2.3 Dynamik des starren Körpers bei fester Drehachse

Für die Translationsbewegung eines starren Körpers werden die Massen der einzelnen Massenpunkte einfach zur Gesamtmasse summiert. Die räumliche Verteilung der Massen geht nur in die Koordinaten des Schwerpunkts ein. Für Rotationsbewegungen wird neben der Winkelgeschwindigkeit das *Trägheitsmoment* eingeführt, um den Bewegungsgleichungen bei Drehungen eine einfache, von Translationsbewegungen bekannte Form zu geben (Tabelle). Das Trägheitsmoment enthält weitere Information zur räumlichen Verteilung der Massen.

2.3.1 Das Trägheitsmoment

Das Trägheitsmoment bezüglich einer durch den Schwerpunkt verlaufenden Drehachse ist die Summe der mit dem Quadrat ihres Abstandes von der Drehachse gewichteten Massenpunkte.

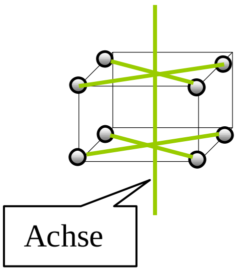
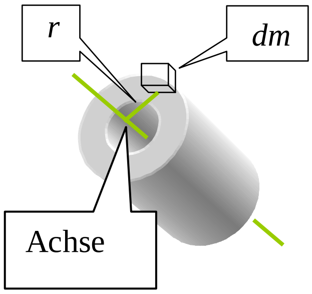
Einzelne Massenpunkte	Kontinuierliche Verteilung
$J = \sum_i m_i \cdot r_i^2$	$J = \int_{Körper} r^2 dm$
	

Tabelle 10 Definition des Trägheitsmoments für eine diskrete und eine kontinuierliche Verteilung der Massen

Das Trägheitsmoment ist immer auf eine *Achse* bezogen. Besonders wichtig und bezeichnend für einen Körper sind die Richtungen der Achsen seines größten und kleinsten Trägheitsmoments. Die folgende Tabelle enthält die Trägheitsmomente einiger rotationssymmetrischer Körper für die Achse des größten Trägheitsmoments

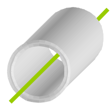
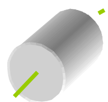
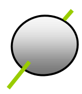
Form	Trägheitsmoment	Lage der Achse
Rohr oder Kreisring, dünnwandig gegen den Radius	$J = M \cdot R^2$	
Scheibe oder Vollzylinder	$J = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2$	
Kugel	$J = \frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2$	

Tabelle 11 Trägheitsmomente einiger Formen, der Radius ist R, die gesamte Masse M. Grün: Achse, auf die sich das Trägheitsmoment bezieht. (Herleitung z. B. in Staudt I, S.126 http://www.uni-tuebingen.de/uni/pki/skripten/Dank.DOC - Staudt)

2.3.1.1 Der Satz von Steiner

Das Trägheitsmoment eines Körpers sei bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt bekannt, der Körper drehe sich aber um eine außerhalb des Schwerpunkts liegende Achse. Bezüglich dieser Achse kann das Trägheitsmoment nach dem Satz von Steiner berechnet werden. Es ist gleich der Summe des Trägheitsmoments um eine parallel zur aktuellen Achse liegenden Schwerpunktsachse und des Trägheitsmoments eines Massenpunktes bezüglich der außerhalb des Schwerpunktes liegenden Drehachse. Dieser Massenpunkt zeigt die Gesamtmasse und liegt im Schwerpunkt.

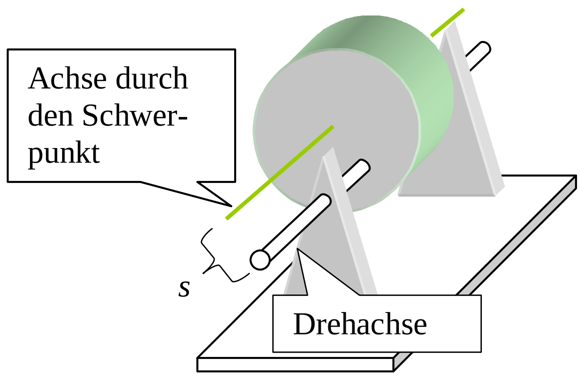
$J = J_S + M \cdot s^2$	
J_S	Trägheitsmoment bezüglich der Achse durch den Schwerpunkt
M	Masse des Körpers
s	Abstand des Schwerpunkts von der Drehachse

Tabelle 12 Der Satz von Steiner . (Herleitung z. B. in Staudt I, S.128 http://www.uni-tuebingen.de/uni/pki/skripten/Steiner.DOC)

2.3.2 Bewegung des starren Körpers bei fester Drehachse

Mit den Begriffen der Winkelgeschwindigkeit und des Trägheitsmoments kann die Drehbewegung eines starren Körpers um eine feste Achse in Analogie zur Translationsbewegung formuliert werden. Alle Massenpunkte bewegen sich auf Kreisbahnen, deshalb zeigen die Vektoren für die Winkelgeschwindigkeit, den Drehimpuls und das Drehmoment in Richtung der Drehachse.

Formel	Begriff
$\vec{\varpi} = \dot{\vec{\varphi}}$	Winkelgeschwindigkeit
$\vec{\beta} = \dot{\vec{\varpi}} = \ddot{\vec{\varphi}}$	Winkelbeschleunigung
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot r^2 \cdot \vec{\varpi}$	Drehimpuls für einen Massenpunkt
$\vec{L} = \sum_i m_i \cdot r_i^2 \cdot \vec{\varpi} = J \cdot \vec{\varpi}$	Drehimpuls für den ganzen Körper
$\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt} = J \cdot \vec{\beta}$	Drehmoment

Tabelle 13 Winkelgeschwindigkeit, Drehimpuls und Drehmoment auf der Kreisbahn, alle Vektoren stehen senkrecht zur Bahnebene in Richtung $\vec{r} \times \vec{v}$.

Weil in einem abgeschlossenen System der Drehimpuls erhalten bleibt, bewirkt eine Änderung des Trägheitsmoments eine entsprechende Änderung der Winkelgeschwindigkeit.

Versuch 7 Pirouette auf dem Drehschemel. Gewichte werden von innen nach außen verlagert, die Winkelgeschwindigkeit verändert sich entsprechend

2.3.2.1 Arbeit bei der Rotation um eine feste Achse

Ein Drehmoment $\vec{T}$ drehe einen Körper um den kleinen Winkel $d\varphi$, indem eine Kraft $\vec{F}$ angreift. Am System wird dadurch Arbeit geleistet.

$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot d\vec{\varphi} \times \vec{r} = \vec{r} \times \vec{F} \cdot d\vec{\varphi} = \vec{T} \cdot d\vec{\varphi}$	Änderung der Arbeit
$dW = F \cdot r \cdot d\varphi = T \cdot d\varphi$	Speziell, wenn eine konstante Kraft F tangential angreift:
$W = T \cdot \varphi$	Entspricht der potentiellen Energie
$dW = T \cdot d\varphi = J \cdot \frac{d\varpi}{dt} \cdot d\varphi$	Einen der kinetischen Energie entsprechenden Ausdruck erhält man, wenn man das Drehmoment mit der Beschleunigung $\varpi = \frac{d\varpi}{dt}$ formuliert und über ϖ integriert
$dW = J \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot d\varpi = J \cdot \varpi \cdot d\varpi$	
$W = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \varpi^2$	

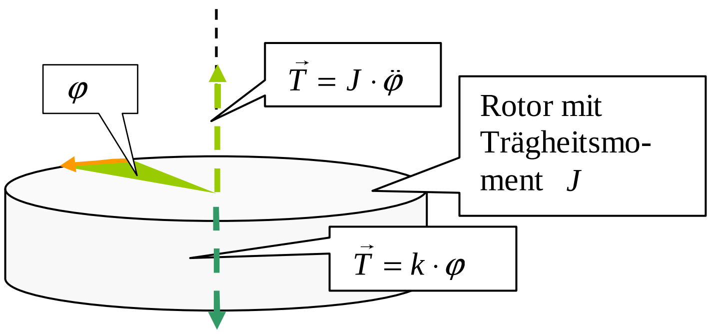
Tabelle 14 Arbeit bei der Drehbewegung

2.3.2.2 Drehschwingunge

Analog zum Federpendel kann mit einer Spiralfeder ein harmonisch schwingendes Pendel aufgebaut werden, wenn die Rückstellkraft proportional zum Auslenkungswinkel ist:

$T = -k \cdot \varphi$	Rückstellendes Drehmoment
$T = J \cdot \ddot{\varphi}$	Winkelbeschleunigung
$J \cdot \ddot{\varphi} = -k \cdot \varphi$	Bewegungsgleichung
$T_{Periode} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J}{k}}$	Periode der Schwingung

Tabelle 15 Kräfte, Bewegungsgleichung und Periode bei Drehschwingungen



Versuch 8 Drehschwingung

2.3.3 Die Abrollbewegung

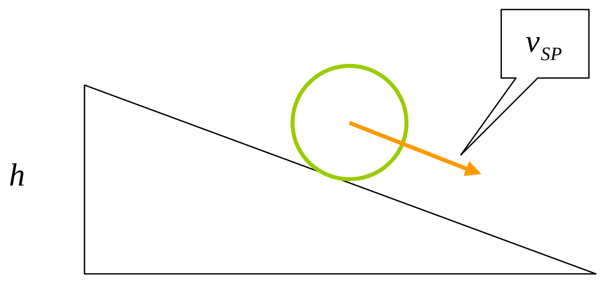
Bei Abrollbewegungen eines Körpers von einer schiefen Ebene wird die Rotations- mit einer Translationsbewegung kombiniert, die Rotationsachse liegt also nicht fest im Raum. Die potentielle Energie teilt sich in kinetische Energie der Translation und der Rotation:

$E_{Pot} = m \cdot g \cdot h$	Potentielle Energie
$E_{Kin} = \frac{m}{2} \cdot v_{SP}{}^{2}$	Kinetische Energie
$E_{Rot} = \frac{J}{2} \cdot \varpi$	Rotations Energie
$E_{Pot} = E_{Kin} + E_{Rot}$	Energieerhaltung
$\varpi = \frac{v_{SP}}{R}$	Winkelgeschwindigkeit und Translationsgeschwindigkeit des Schwerpunkts
$m \cdot g \cdot h = \frac{m}{2} \cdot v_{Sp}^{2} + \frac{J}{2} \frac{v_{Sp}^{2}}{R^{2}}$	Energieerhaltung
$v_{Sp}^{2} = \frac{2 \cdot g \cdot h}{1 + \frac{J}{m \cdot R^{2}}}$	v_{SP} Translationsgeschwindigkeit
$v_{SP}^{2} = \frac{4}{3} \cdot g \cdot h$	Vollzylinder
$v_{SP}^{2} = g \cdot h$	Hohlzylinder

Tabelle 16 Translationsgeschwindigkeit des Schwerpunkts beim Abrollen von einer schiefen Ebene der Höhe h.

Das Ergebnis für Voll- und Hohlzylinder ist unabhängig von Masse und Radius: Der Vollzylinder - gleich welcher Größe - ist auf der schiefen Ebene immer schneller als ein beliebiger Hohlzylinder.

Versuch 9 Abrollen unterschiedlicher Gegenstände



2.3.4 Begriffe zur Rotationsbewegung um eine feste Achse im Vergleich mit der Translationsbewegung

Die folgende Tabelle zeigt sich entsprechende Begriffe zur Beschreibung der Translation und Rotationsbewegung um eine feste Achse.

Translation		Rotation	
	Verknüpfung zwischen beiden		
Wegstück	$d\vec{s}$	$d\vec{\varphi}$	Winkel
	$d\vec{s} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$		
Geschwindigkeit	$\vec{v} = \dot{\vec{s}}$	$\vec{\varpi} = \dot{\vec{\varphi}}$	Winkelgeschwindig-keit
	$\vec{v} = \vec{\varpi} \times \vec{r}$		
Beschleunigung	$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{s}}$	$\vec{\beta} = \dot{\vec{\varpi}} = \ddot{\vec{\varphi}}$	Winkelbeschleuni-gung
	$\vec{a} = \dot{\vec{\varpi}} \times \vec{r}$		
Träge Masse	m	J	Trägheitsmoment
	$J = \int r^2 dm$		
Impuls	$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	$\vec{L} = J \cdot \vec{\varpi}$	Drehimpuls
	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$		
Kraft	$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m \cdot \vec{a}$	$\vec{T} = \dot{\vec{L}} = J \cdot \vec{\beta}$	Drehmoment
	$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$		
Kinetische Energie	$E_{Kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$	$E_{Rot} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \varpi^2$	Rotationsenergie
	$\frac{1}{2} \cdot \sum_i m_i \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_i m_i \cdot (r_i \cdot \varpi)^2$		
Arbeit	$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$	$dW = \vec{T} \cdot d\varphi$	Arbeit
	$\vec{F} \cdot (d\vec{\varphi} \times \vec{r}) = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot d\vec{\varphi}$		

Tabelle 17 Vergleich von Translations- und Rotationsbewegung bei vorgegebener fester Drehachse. In der Mitte steht jeweils die Verknüpfung der entsprechenden Größen bei gerad-liniger Bewegung und der Drehung.