



Ganzheitliche Theorie der Physik

In den folgenden Ausführungen werden Grundkenntnisse in Mathematik und Theoretischer Physik auf dem Niveau der Integrierten Kurse Physik I bis III vorausgesetzt.

1. Überblick

Grundlage der Theoretischen Physik ist die räumliche, zeitliche und materielle Struktur der Welt. Sie befasst sich mit Bewegung. In der klassischen Physik bewegen sich Punktteilchen oder Masseverteilungen auf Bahnkurven, in der Quantenphysik breiten sich Wahrscheinlichkeiten für Wirkungen aus.

Zum Verständnis der Bewegung gehört es auch, die Änderung eines Bewegungszustandes aufgrund von Wechselwirkung oder Raum-Zeit-Krümmung zu erfassen.

Die Struktur der Raumzeit

Die Struktur des Raumes ergibt sich aus der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit in gleichförmig bewegten Bezugssystemen. Die Beschreibung raum-zeitlicher Zusammenhänge wird so konstruiert, dass die Lichtgeschwindigkeit in jedem Bezugssystem denselben Wert c hat. Das führt zu Vierervektoren für Ort und Geschwindigkeit. Man sagt, alle physikalischen Gesetze müssen Lorentz-Invariant sein, sie müssen in jedem gleichförmig bewegten Bezugssystem gleich sein und die Lichtgeschwindigkeit muss in jedem denselben Wert c haben.

Aus der Lorentz-Invarianz folgen ganz allgemeine Aussagen über Bewegung. Bewegung wird als Impulsfeld quantifiziert. Für die Lorentz-invariante Behandlung eignet sich das Wirkungsfeld. Es ist ein skalares Feld, also unabhängig vom Bezugssystem, und kann als Potential des Impulsfeldes aufgefasst werden. Das Impulsfeld ergibt sich als Gradient des Wirkungsfeldes.

Die Betrachtung des Wirkungsfeldes führt zum Viererimpuls, zum Energiebegriff und zur Energieerhaltung.

Klassische Mechanik

Es kommt nun zur Frage, was sich bewegt. Auf den ersten Blick scheint das offensichtlich, nämlich Materie auf Bahnkurven. Das ist das Bild der klassischen Mechanik. Bahnkurven werden so in den Raum gelegt, dass die Geschwindigkeit an jedem Punkt der Bahnkurve proportional zum Impulsfeld ist. Die Proportionalitätskonstante ist die Masse. Mit diesem Verständnis von Bewegung führt die Energieerhaltung unmittelbar auf die Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik.

Quantenmechanik

Man kann sich leicht klar machen, dass Bahnkurven eine gewaltige Abstraktion der Wirklichkeit darstellen. Punktteilchen mit exakten Positionen und Geschwindigkeiten, die sich in unendlich kleinen Schritten von einem Punkt zum anderen fortbewegen, werden nirgends beobachtet. Wie genau die Position eines Körpers festliegt, hängt vom verwendeten Maßstab ab und für die Geschwindigkeitsmessung braucht man immer zwei Messpunkte und kommt grundsätzlich zu einer mittleren Geschwindigkeit.

Die jeder physikalischen Beobachtung zugrundeliegende Unschärfe lässt sich nur statistisch erfassen. Anstatt Bahnkurven betrachtet man Wahrscheinlichkeitsströme. Die Wahrscheinlichkeit für das Ansprechen eines Detektors ist dabei erhalten und unterliegt einer Kontinuitätsgleichung. Die Stromausbreitung unterliegt der Energieerhaltung.

Zur quantenmechanischen Schrödinger-Gleichung ist es nun nur noch ein kleiner Schritt. Neben der kinetischen Energie des Massepunktes wird ein weiterer Energiebeitrag berücksichtigt, der von der Dichte der Messwahrscheinlichkeit abhängt. Das geschieht, indem das Impuls- und Energiefeld ersetzt wird durch Impuls- und Energieoperatoren. Bei einer statistischen Auswertung sorgt dieser zweite Energiebeitrag dafür, dass nicht nur die mittlere Energie, sondern die Energie jeder Möglichkeit des Wahrscheinlichkeitsstromes erfasst wird.

- Diese sogenannte Quantisierung sorgt dafür, dass die Beschreibung jeder Messung eine prinzipielle Unschärfe berücksichtigt, was vor allem im Planckschen Wirkungsquantum h und in der Heisenbergschen Unschärferelation zum Ausdruck kommt.
- Sie setzt das Liouville-Theorem außer Kraft und erlaubt somit das Zerfließen der Wahrscheinlichkeitsverteilung.
- Sie führt zur Komplementarität von Ort und Impuls oder Welle und Teilchen,
- und zur Nichtlokalität, bei der eine Messung an einem Raumpunkt die Wahrscheinlichkeitsverteilung an einem ganz anderen Ort instantan beeinflusst. Damit wird auch die Rolle des Beobachters herausgestellt.

Wechselwirkung

Lorentz-Invarianz erlaubt zunächst nur eine gleichförmige Bewegung, der Betrag des Viererimpulses ist konstant. Beobachtet wird aber ein Impulsgradient. Da dieser keiner Willkür unterliegen darf, um beobachtbar zu sein, muss er einer Kontinuitätsgleichung genügen.

Die Kontinuitätsgleichung des Impulsgradienten erweist sich als Potentialgleichung, die in der Elektrodynamik den Maxwell-Gleichungen mathematisch äquivalent ist und auch zum Gravitations-Potential führt.

Raumkrümmung

Alternativ zur Einführung eines in der Beobachtung nicht existenten Vektorpotentials kann ein Impulsgradient durch Fliehkräfte in einem gekrümmten Raum bewirkt werden. Zwar ist der Raum auch nicht beobachtbar, er ist aber von vornherein Grundlage der formalen Weltbeschreibung. Erhaltene Impulsgradienten führen im einfachsten Fall auf die Schwarzschild-Metrik und auf die Struktur Schwarze Löcher.

2. Koordinatensysteme

Koordinatentripel

Um einen Punkt im Raum zu lokalisieren, braucht man drei Zahlen für seine Entfernung vom Ursprung in x , y und z -Richtung. Diese Zahlen fasst man in einem Zahlentripel zusammen.

$$\text{Raumpunkt: } \vec{r} \equiv \overbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}^{\text{Zahlentripel}} \quad (2-1)$$

Man kann diese Tripel auch als 3×1 -Matrix ansehen, sie transponieren oder die Matrizenmultiplikation darauf anwenden, etwa um Raumpunkte zu drehen.

Vektoren

Das Zahlentripel in (2-1) enthält die Koordinaten x , y und z eines Raumpunktes. Zu einer vollständigen mathematischen Beschreibung des Punktes gehört auch noch die Angabe der Richtungen $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$, auf die sich die Koordinaten beziehen. So wird aus einem Koordinatentripel ein Vektor.

Ein vollständiges Koordinatensystem (KS) besteht aus Ursprung, Basis und Koordinaten. Die Koordinaten geben an, wie oft der jeweilige Basisvektor \hat{e}_i in der entsprechenden Richtung angelegt werden muss, um vom Ursprung zum Raumpunkt zu kommen.

Man wählt zunächst ein kartesisches Koordinatensystem. Dabei haben die Basisvektoren die Länge 1 und stehen rechtwinklig auf einander, sie sind orthonormal.

$$\text{Basisvektoren: } \hat{e}_i \quad (2-2)$$

$$\text{Orthonormalität: } \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$$

$$\text{Vektoren 3D: } \vec{r}^{(3)} \equiv \vec{r} \equiv \sum_{n=1}^3 x_n \underbrace{\hat{e}_n}_{\text{Koordinaten-Basis}} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$$

$$\text{Vektoren 4D: } \vec{r}^{(4)} \equiv \sum_{\mu=1}^4 x_\mu \hat{e}_\mu = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z + x_4\hat{e}_4$$

Die Beziehung zwischen Ursprung und Raumpunkt ist unabhängig vom KS , die Koordinaten nicht. Sie hängen von der willkürlich gewählten Basis ab. Diese Willkür ist jedoch zur Quantifizierung der Beziehung zwischen Ursprung und Raumpunkt unumgänglich.

Transformation der Basis

Wenn mit verschiedenen Basen derselbe Raumpunkt beschrieben wird, muss es eine Beziehung oder Transformation T zwischen den Koordinaten im einen KS mit denen im anderen geben. Man bezeichnet dann \vec{r} als Vektor und $x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z + x_4\hat{e}_4$ als Darstellung des Vektors. Der Vektor ist koordinatenunabhängig, die Darstellung nicht.

Vektoren:
$$\vec{r} = \sum_{n=1}^3 x_n \hat{e}_n = \sum_{n=1}^3 x'_n \hat{e}'_n \quad (2-3)$$
Vektor (KS-unabhängig) Darstellung im KS \hat{e} Darstellung im KS \hat{e}'

Basistransformation T :
$$\hat{e}'_n = \sum_{m=1}^3 T_{nm} \hat{e}_m$$

Bedingung:
$$\delta_{kl} = \hat{e}'_k \cdot \hat{e}'_l = \sum_{m,n=1}^3 \underbrace{T_{km} \hat{e}_m \cdot T_{ln} \hat{e}_n}_{T_{km} T_{ln} \hat{e}_m \cdot \hat{e}_n = T_{km} T_{lm} = T_{km} T'_{ml}} = \sum_{m=1}^3 T_{km} T_{lm}$$

$$= \sum_{m=1}^3 T_{km} T_{ml} = \sum_{m=1}^3 T_{km} T_{ml}^{-1}$$

Matrixschreibweise: $\bar{T} \equiv (T_{km}), \quad \bar{T} \bar{T}^t = \mathbf{1}, \quad \bar{T}^t = \bar{T}^{-1}$

Transformation der Koordinaten

Vergleich der Darstellungen:
$$\sum_{n=1}^3 x'_n \hat{e}'_n = \sum_{n,k=1}^3 x'_n T_{nk} \hat{e}_k = \sum_{n=1}^3 x_k \hat{e}_k \quad (2-4)$$

Koeffizientenvergleich:
$$x_k = \sum_{n=1}^3 x'_n T_{nk}$$

Matrixschreibweise:
$$\bar{x} = \bar{T} \bar{x}', \quad \bar{x}' = \bar{T}^t \bar{x}$$

Invarianten

Für eine mathematische Modellierung physikalischer Zusammenhänge sind Größen wichtig, die nicht vom willkürlich gewählten Koordinatensystem abhängen. Solche Größen sind in erster Linie der Abstand eines Raumpunktes vom Ursprung bzw. die Länge eines Vektors, der Winkel zwischen zwei Vektoren und das Volumen des Spatkrists, der von drei Vektoren aufgespannt wird.

Längenquadrat eines Vektors:
$$a^2 \equiv \vec{a} \cdot \vec{a} = \sum_{i,j=1}^3 a_i \underbrace{\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j}_{\delta_{ij}} a_j = \sum_{i=1}^3 a_i^2 \quad (2-5)$$

Winkel α zwischen zwei Vektoren:
$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = (ab)^{-1} \sum_{i=1}^3 a_i b_i$$

Spatprodukt:
$$V = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

Die Interpretation von a als Vektorlänge ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras. Die Interpretation von α als Vektorwinkel ergibt sich einfach bei Betrachtung eines speziellen KSs mit $\vec{b} = b \hat{e}_j$. Da $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$ eine koordinatenunabhängige Zahl oder eine Skalar ist, gilt die Aussage dann ganz allgemein.

Spezieller Vektor: $\vec{b} = b\hat{e}_j$ (2-6)

Winkel α zwischen zwei Vektoren: $\cos \alpha = (a)^{-1} \sum_{i,j=1}^3 a_i \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \underbrace{\frac{a_j}{a}}_{\text{cos des Winkels zwischen } \vec{a} \text{ und der } \hat{e}_j\text{-Achse}}$

Die Interpretation von V als Spatvolumen findet man z.B. in Referenz [1].

Generalisierte Koordinaten und Grundvektoren

Physikalische Berechnungen werden stark vereinfacht oder gar gelöst durch die Wahl geeigneter Koordinaten q^i : $x_i \rightarrow x_i(q^1, \dots, q^N)$. An die Stelle der Basisvektoren \hat{e}_i treten dann Grundvektoren \vec{g}_i als partielle Ableitungen des Ortsvektors nach den generalisierten Koordinaten q^i . Der Vektor \vec{g}_i liegt tangential an der durch $q^i \rightarrow \vec{r}(q^i)|_{q^{j \neq i} \text{ konst.}}$ definierte Raumkurve an. Die Grundvektoren sind im Allgemeinen nicht orthogonal.

Grundvektor: $\vec{g}_i \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}$ (2-7)

Metrik: $g_{ij} \equiv \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{für kartesische Koordinaten} \\ g_i^2 \delta_{ij} & \text{für orthogonale K. (Zylinderk., Kugelk.,...)} \\ g_{ij} \neq 0 & \text{im Allgemeinen} \end{cases}$

Kontravariante Grundvektoren

Als zu \vec{g}_i orthogonale Vektoren dienen die kontravarianten Grundvektoren \vec{g}^i . In den meisten Fällen braucht man sie nicht explizit zu berechnen, man kann sie jedoch als Gradient des 'Koordinatenfeldes' $q^i(x_1, x_2, x_3)$ bestimmen.

Kontravarianter (2-8)

Grundvektor: $\vec{g}^i \equiv \vec{\nabla} q^i(x_1, x_2, x_3)$

Orthonormalität: $\vec{g}^i \cdot \vec{g}_j = \vec{\nabla} q^i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^j} = \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial q^i(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_k} \hat{e}_k \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^N \frac{\partial x_l(q^1, \dots, q^N)}{\partial q^j} \hat{e}_l \right)$
 $= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial q^i(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_k} \frac{\partial x_k(q^1, \dots, q^N)}{\partial q^j} = \frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \delta_j^i$

Einsteinsche Summenkonvention

Um Gleichungen übersichtlicher zu machen, lässt man das Summensymbol weg, wenn über einen oberen und unteren Index summiert wird.

$$\text{Beispiel: } \vec{g}^k \cdot \vec{g}_k \equiv \sum_{k=1}^3 \vec{g}^k \cdot \vec{g}_k, \quad a^i \vec{g}_i \equiv \sum_{k=1}^3 a^i \vec{g}_i \quad (2-9)$$

Entwicklungsbasen

Beide Grundvektorsysteme \vec{g}_i und \vec{g}^i dienen als Entwicklungsbasen. Vorausgesetzt ist dabei die lineare Unabhängigkeit der Grundvektoren.

$$\text{Entwicklung:} \quad \vec{a} \cdot \vec{g}^i = \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{g}^k)}_{\text{Summenkonvention!}} \delta_k^i = (\vec{a} \cdot \vec{g}^k) \vec{g}_k \cdot \vec{g}^i \quad (2-10)$$

$$\text{Koeffizientenvergleich in } \vec{g}^i: \quad \vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{g}^k) \vec{g}_k = a^k \vec{g}_k$$

$$\text{entsprechend:} \quad \vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{g}_k) \vec{g}^k = a_k \vec{g}^k$$

Metrik und Skalarprodukt

$$\text{Metrik:} \quad \delta_i^j = \vec{g}_i \cdot \vec{g}^j = \vec{g}_i \cdot (\vec{g}^j \cdot \vec{g}^k) \vec{g}_k = g^{ik} g_{ik} \quad (2-11)$$

$$\text{also:} \quad \vec{g}^{ik} = \vec{g}_{ik}^{-1}$$

$$\text{Skalarprodukt:} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{g}_i a^i \cdot \vec{g}_j b^j = g_{ij} a^i b^j = a_i b^i$$

$$\text{Längenquadrat eines Vektors:} \quad a^2 = g_{ij} a^i a^j$$

Hoch- und runterziehen von Indizes

$$\text{Hoch- und runterziehen von} \quad \overbrace{a^i \vec{g}_i}^{\vec{r}} = \overbrace{a_j \vec{g}^j}^{\vec{r}} = a_j (\vec{g}^j \cdot \vec{g}^k) \vec{g}_k = \underbrace{a_j g^{ji}}_{=a^i} \vec{g}_i \quad (2-12)$$

(Koeffizientenvergleich in \vec{g}_i)

$$\text{also:} \quad a^i = g^{ij} a_j, \quad a_i = g_{ij} a^j$$

Totales Differential und Gradient

$$\text{Differential des Ortsvektors:} \quad d\vec{r} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} dq^i = \vec{g}_i dq^i \quad (2-13)$$

$$\text{Differentials eines Feldes:} \quad d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial q^i} dq^i = \frac{\partial \phi}{\partial q^j} \delta_i^j dq^i = \frac{\partial \phi}{\partial q^j} \underbrace{\vec{g}^j \cdot \vec{g}_i}_{\equiv \vec{\nabla} \phi} dq^i = \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{r}$$

$$\text{Gradient in generalisierten} \quad \vec{\nabla} \phi = \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial q^j}}_{\equiv p_j} \vec{g}^j = p_j \vec{g}^j$$

Koordinaten:

3. Lorentz-Invarianz

Grundlage zur Beschreibung raum-zeitlicher Zusammenhänge ist die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit vom Bezugssystem. Im Gegensatz zur Ausbreitung von Signalen in Luft oder Wasser breitet sich Licht nicht in einem wahrnehmbaren Medium aus. Wahrnehmbar ist hier nur der Zusammenhang zwischen Ursache (Lichtquelle) und Wirkung (beleuchteter Gegenstand). Dieser Zusammenhang bezieht sich immer auf den Beobachter. Philosophische und psychologische Betrachtungen legen nahe, dass dieser Zusammenhang erst 'im Kopf des Beobachters' entsteht.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Lichtsignalen kann sich nur auf das jeweilige Bezugssysteme beziehen. Daher ist physikalisch die Ausbreitungsgeschwindigkeit c von Lichtsignalen in allen Bezugssystemen gleich.

Ausbreitung von Lichtsignalen

Bei der mathematischen Beschreibung raum-zeitlicher Bezüge wird der Invarianz von c Rechnung getragen, indem sie in Form eines Skalarprodukts von Vierervektoren formuliert werden.

$$\text{Ausbreitung von Lichtsignalen: } \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{\substack{\text{Abstandsquadrat von} \\ \text{der Lichtquelle}}} - \underbrace{c^2 t^2}_{\substack{\text{in } t \text{ zurück-} \\ \text{gelegter Weg}} = 0 \quad (3-1)$$

$$\text{in einem anderen Koordinatensystem: } x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0, \quad (c = c'!)$$

Invariante Formulierung

$$\text{als Vektorlänge: } (\vec{r}^{(4)})^2 = 0$$

$$\text{mit Viererort: } \vec{r}^{(4)} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z + ict\hat{e}_t$$

$$\text{oder: } \vec{r}^{(4)} = \begin{pmatrix} \vec{r} \\ ict \end{pmatrix}$$

Minkowski-Metrik

Es gibt einige formale Möglichkeiten, mit Vierervektoren umzugehen. Zu relativ übersichtlichen Formeln kommt man, wenn man als vierte Komponente des Viererortes eine generalisierte Koordinate $x^4 = ct$ einführt.

$$\text{Ortsdifferential: } d\vec{r}^{(4)} = dq^i \vec{g}_i^{(4)} + d \overset{q^4}{ct} \vec{g}_4^{(4)}, \quad i \in \{1..3\} \quad (3-2)$$

$$\text{Grundvektoren: } \vec{g}_i^{(4)} = \hat{e}_i, \quad \vec{g}_4^{(4)} = \frac{\partial \vec{r}^{(4)}}{\partial ct} = i\hat{e}_4$$

$$\text{Kontravariant: } \vec{g}^{(4)i} = \hat{e}_i, \quad \vec{g}^{(4)4} = -i\hat{e}_4$$

$$\text{Minkowski-Metrik: } \bar{g}_{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$$

Lorentz-Transformation (LT)

Zwei Bezugssysteme haben zueinander die konstante Relativgeschwindigkeit v . Die LT T_L verknüpft die Darstellungen eines Raum-Zeit-Punktes in einem mit dem im anderen. Die Relativbewegung erfolgt zur formalen Vereinfachung in x -Richtung. Damit können wir uns auf die Transformation der x und ct Koordinaten beschränken.

$$\text{Lorentz-Transformation: } \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \bar{T}_L \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}, \quad y' = y, z' = z \quad (3-3)$$

Die Matrix \bar{T}_L enthält vier Elemente, die jeweils von der Relativgeschwindigkeit v der beiden Koordinatensysteme abhängen. Drei davon werden durch die Invarianzbedingung der Lichtsignalgeschwindigkeit durch Koeffizientenvergleich in x^2 , xct und $(ct)^2$ festgelegt, das vierte folgt aus der Definition der Relativgeschwindigkeit als Geschwindigkeit des Ursprungs der Koordinatensysteme zueinander.

$$\text{Invarianzbedingung: } \underbrace{x'^2 - (ct')^2}_{(\bar{T}_{L11}x + \bar{T}_{L12}ct)^2 - (\bar{T}_{L21}x + \bar{T}_{L22}ct)^2} = x^2 - (ct)^2 \quad (3-4)$$

$$\text{Vergleich der Koeffizienten: } \underbrace{\text{Koeff}(x^2)}_{=0} x^2 + \underbrace{\text{Koeff}((ct)^2)}_{=0} (ct)^2 + \underbrace{\text{Koeff}(xct)}_{=0} xct = 0$$

$$\text{Relativbewegung der Systeme: } 0 = x' = T_{L,11}x + T_{L,12}ct \quad \text{und} \quad v = \frac{x}{t}$$

$$\text{Lösung der vier Gleichungen} \rightarrow: \bar{T}_L = \gamma \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - v^2/c^2}}$$

Invariante Zeit oder Eigenzeit eines Raum-Zeit-Punktes

Die Eigenzeit τ beschreibt den Zeitablauf im Ruhesystem. Sie ist die einzige Zeitskala, auf die sich alle Beobachter gemeinsam beziehen können. Der Zusammenhang zwischen der Eigenzeit τ und der Zeit t eines Beobachters in einem anderen System folgt aus der LT.

$$LT: \quad \begin{pmatrix} 0 \\ c\tau \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}, \quad \text{mit } x = -vt \quad (3-5)$$

$$\text{also: } c\tau = \gamma \left(\frac{xv}{c} + ct \right) = \gamma \left(-\frac{v^2 t}{c} + ct \right) = \gamma \underbrace{\left(-\frac{v^2}{c^2} + 1 \right)}_{\gamma^{-2}} ct$$

$$\text{Eigenzeit} \sim \text{Beobachterzeit: } \tau = \frac{1}{\gamma} t$$

Vierergeschwindigkeit eines Raum-Zeit-Punktes

Die Vierergeschwindigkeit ist die Ableitung des Viererortes nach der invarianten Zeit τ .

$$\begin{aligned} \text{Vierergeschwindigkeit: } \vec{v}^{(4)} &\equiv \frac{d\vec{x}^{(4)}}{d\tau} = \gamma \frac{d\vec{x}^{(4)}}{dt}, \quad \vec{v}^{(4)} = \gamma \frac{d}{dt}(\vec{x}, ct) = \gamma(\vec{v}, c) & (3-6) \\ \text{Länge (Invariante): } \vec{v}^{(4)2} &= \gamma^2 (g_{ij} v^i v^j + g_{44} c^2) = \gamma^2 \underbrace{(v^2 - c^2)}_{-c^2/\gamma^2} = -c^2 \end{aligned}$$

4. Bewegung und Wirkungsfeld

Bewegung

Die Welt unterliegt einer ständigen Veränderung. Die objektiven oder kontextunabhängigen Aspekte dieser Bewegung werden physikalisch als Impuls quantitativ erfasst. Das verstehen wir an dieser Stelle noch sehr allgemein. Erst in der Klassischen Mechanik wird dieser Impuls mit der Geschwindigkeit von Massepunkten auf Bahnkurven in Verbindung gebracht.

Bewegung hat eine Richtung und wird daher durch einen Vektor beschrieben. Der Umgang mit Impuls erfordert daher die Wahl eines Koordinatensystems mit einer willkürlichen Basis. Die grundlegende Formulierung der physikalischen Grundgesetze darf diese Willkür aber nicht enthalten.

Wirkungsfeld

Als invariante Größe zur Begründung physikalischen Grundgesetze eignet sich das Impulspotential, aus dem sich der Impuls dann als Gradient ergibt. Es wird als Wirkung S bezeichnet und spielt in den folgenden Kapiteln die zentrale Rolle.

Wirkungsfeld S als Potential des Impulsfeld: (4-1)

$$\text{Impuls: } \vec{p} = \vec{\nabla} S$$

$$\text{Differential: } dS = \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q^i}}_{\equiv p_i} dq^i + \underbrace{\frac{\partial S}{\partial t}}_{\equiv -E} dt$$

$$\text{Energie: } \frac{\partial S}{\partial t} \equiv -E$$

Die zeitliche Änderung des Wirkungsfeldes wird hier relativ willkürlich als Energie bezeichnet. Gleich folgt aus der Hamilton-Jacobi-Gleichung, dass sie unter Umständen eine Erhaltungsgröße ist.

Viererimpuls

Die Lorentz-Invarianz der physikalischen Gesetze erfordert den Umgang mit Vierervektoren, auch für den Impuls.

$$\text{Wirkungsdifferential: } dS = \frac{\partial S}{\partial q^\mu} dq^\mu = p_i \bar{g}^{(4)i} \cdot \bar{g}_j^{(4)} dq^j - \frac{E}{c} \bar{g}^{(4)4} \cdot \bar{g}_4^{(4)} dct \quad (4-2)$$

$$\text{Viererimpuls: } \vec{p}^{(4)} = p_i \bar{g}^{(4)i} - \frac{E}{c} \bar{g}^{(4)4}$$

$$\text{Koordinaten-Tupel: } \vec{p}^{(4)} = \begin{pmatrix} \vec{p} \\ -\frac{E}{c} \end{pmatrix}_{\text{kontravariant}}$$

$-E/c$ ist die vierte Komponente des kontravarianten Vierervektors. Das muss im Folgenden immer beachtet werden.

Energiefunktion und nichtrelativistischer Grenzfall

Die Länge des Viererimpulses ist wieder eine Invariante, ein Lorentz-Skalar. Wir bezeichnen ihn hier erst einmal als α und identifizieren ihn in der klassischen Mechanik als Masse m . Der Energieausdruck vor allem für kleine Dreierimpulse wird ebenfalls in der klassischen Mechanik wichtig.

$$\text{Länge Impulsvektor (Invariante): } \left(\vec{p}^{(4)}\right)^2 = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = \vec{p}^2 - \frac{E^2}{c^2} = \underbrace{-\alpha^2 c^2}_{\substack{\text{Konst} \\ \text{Lorentz-Skalar}}} \quad (4-3)$$

$$\text{Energie: } E = c\sqrt{\alpha^2 c^2 + \vec{p}^2} = \alpha c^2 \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{\alpha^2 c^2}}$$

$$\text{kleine Impulse: } E = \alpha c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\vec{p}^2}{\alpha^2 c^2} + O\left(\frac{\vec{p}^4}{\alpha^4 c^4}\right) \right) \approx \alpha c^2 + \frac{\vec{p}^2}{2\alpha}$$

Hamilton-Jacobi-Gleichung (HJG) und Hamilton-Funktion

Drückt man die Energiefunktion (4-3) durch das Wirkungsfeld aus, kommt man zur

$$\text{HJG: } \underbrace{\frac{\partial S(\vec{r}, t)}{\partial t}}_{-E} + \frac{1}{2\alpha} \underbrace{\left(\vec{\nabla} S(\vec{r}, t)\right)^2}_{\frac{\vec{p}^2}{2\alpha}} + V(\vec{r}) = 0 \quad (4-4)$$

$$\text{oder: } E = H$$

$$\text{mit Hamilton-Funktion } H \equiv \frac{1}{2\alpha} \left(\vec{\nabla} S(\vec{r}, t)\right)^2 + V(\vec{r})$$

Der Term αc^2 wird dabei als in der nichtrelativistischen Physik irrelevant weggelassen und es wird ein ortsabhängiges Potential $V(\vec{r})$ berücksichtigt. Wie es dazu kommt, wird im Kapitel über Wechselwirkung behandelt.

Energieerhaltung

Hängt das Potential V in (4-4) nicht von der Zeit ab, kann die Hamilton-Jacobi-Gleichung durch 'Trennung der Variablen' gelöst werden.

$$\text{Lösungsansatz: } S(\vec{r}, t) = W_{\vec{r}}(\vec{r}) + S_t(t) \quad (4-5)$$

$$\text{HJG: } \frac{\partial S_t(t)}{\partial t} + \frac{1}{2\alpha} \left(\vec{\nabla} W_{\vec{r}}(\vec{r})\right)^2 + V(\vec{r}) = 0$$

$$\text{Trennung der Variablen: } \underbrace{\frac{1}{2\alpha} \left(W_{\vec{r}}(\vec{r})\right)^2 + V(\vec{r})}_{\text{zeitunabhängig}} = \underbrace{-\frac{\partial S_t(t)}{\partial t}}_{\text{ortsunabhängig}} = E$$

$$\text{also: } E = \text{konstant}$$

Konstanten der Bewegung

Wie die Energie E können auch andere Größen durch Trennung der Variablen als konstant identifiziert werden. Darin und vor allem in der Wahl der richtigen Koordinaten besteht ein wesentlicher Schritt zur Lösung physikalischer Probleme.

Hamilton-Funktion:
$$H = \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{2m} g_{ij} \frac{\partial W_{\vec{r}}(\vec{r})}{\partial q^i} \frac{\partial W_{\vec{r}}(\vec{r})}{\partial q^j} + V(q^1, \dots, q^N) \quad (4-6)$$

spezielles Beispiel:
$$H = \frac{1}{2m} g_{11}(q^1) \frac{\partial W_{\vec{r}}(\vec{r})}{\partial q^1} \frac{\partial W_{\vec{r}}(\vec{r})}{\partial q^1} + V_1(q^1) + \sum_{i,j=2}^N \frac{1}{2m} g_{ij} \frac{\partial W_{\vec{r}}(\vec{r})}{\partial q^i} \frac{\partial W_{\vec{r}}(\vec{r})}{\partial q^j} + V_{2..N}(q^2, \dots, q^N) = E$$

Seperationsansatz:
$$W_{\vec{r}}(\vec{r}) = W_1(q^1) + W_{2..N}(q^2, \dots, q^N)$$

damit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} g_{11}(q^1) \left(\frac{\partial W_1(q^1)}{\partial q^1} \right)^2 + V_1(q^1) = \\ E - \sum_{i,j=2}^N \frac{1}{2m} g_{ij} \frac{\partial W_{2..N}(q^2, \dots, q^N)}{\partial q^i} \frac{\partial W_{2..N}(q^2, \dots, q^N)}{\partial q^j} + V_{2..N}(q^2, \dots, q^N) \\ = const \end{aligned}$$

Ist etwa $V(\vec{r}) = V(z)$, folgt sofort die Impulserhaltung in x - und y -Richtung $p_x = const$, $p_y = const$.

Für ein Zentralpotential $V(\vec{r}) = V(r)$ folgt mit $\vec{r} = r \cos \varphi \hat{e}_x + r \sin \varphi \hat{e}_y$ sofort die Erhaltung des Drehimpulses $p_\varphi = const$.

5. Klassische Mechanik

Bahnkurven

Den Kern der Klassischen Mechanik bilden Bahnkurven, auf denen sich Punktmassen bewegen. Im Rahmen dieses mathematischen Modells sind Punktmassen zu einem exakt gegebenen Zeitpunkt an einem exakt gegebenen Raumpunkt und haben eine exakte Geschwindigkeit. Das entspricht natürlich in keiner Weise den beobachtbaren Gegebenheiten, stellt aber eine geniale Abstraktion derselben dar. Ortsmessungen sind so genau wie der verwendete Maßstab, Geschwindigkeitsmessung sind immer mittlere Geschwindigkeiten zwischen zwei Ortsmessungen und das Produkt aus Ortsunschärfe und Impulsunschärfe ist prinzipiell größer als das halbe Plancksche Wirkungsquantum \hbar . Trotzdem ist die Abstraktion der Wirklichkeit zu Punktmassen auf Bahnkurven extrem mächtig.

Bewegung kann nun mit der zeitlichen Ortsänderung der Punktmasse, also mit ihrer Geschwindigkeit in Zusammenhang gebracht werden. Die Geschwindigkeit ist proportional zum Impuls am entsprechenden Ort. Die Proportionalitätskonstante ist bekannt als Masse m : Ein Kraft ändert den Bewegungszustand des Teilchens. Je leichter die Punktmasse ist, desto mehr ändert sich die Geschwindigkeit bei gleicher Impulsänderung.

Damit haben wir die Aufgabe, eine Bahnkurve so über das Impulsfeld zu legen, dass der Geschwindigkeitsvektor an jedem Raum-Zeit-Punkt proportional zum Impulsvektor ist.

$$\begin{aligned}
 \text{Punktteilchen:} \quad & q^i \rightarrow q^i(t) & (5-1) \\
 \text{Impuls:} \quad & p_k(q^i, t) \rightarrow p_k(q^i(t), t) \rightarrow p_k(t) \\
 \text{Geschwindigkeit:} \quad & v^i(t) \equiv \dot{q}^i(t) = \frac{1}{m} g^{ik} p_k(t) \\
 \text{Bahnkurve:} \quad & q^i(t) = q^i(t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t g^{ik} p_k(q^i(t'), t') dt'
 \end{aligned}$$

Das Impulsfeld kann grundsätzlich durch Lösung der *HJG* bestimmt und in (5-1) verwendet werden. Die Bahnkurve wird so jedoch durch eine kaum lösbare Integralgleichung definiert. Es ist auch umständlich, die *HJG* zu lösen und das Wirkungsfeld selber wird in der Regel nicht benötigt, sondern nur seine Ableitungen. Daher betrachten wir alternative Wege zum Bestimmen der Bahnkurven.

Integration des Impulses

Ein mechanisches Problem ist überhaupt nur dann integrierbar, wenn es durch Wahl geeigneter Koordinaten in die einzelnen Freiheitsgrade separiert werden kann. Die Separation der Variablen erlaubt es dann, die Impulse durch die entsprechenden konstanten Energien auszudrücken und zur Bahnkurve aufzuintegrieren.

$$\text{Energie: } E = \frac{1}{2m} \underbrace{\sum_{i,j=2}^N g^{ij} p_i p_j}_{\equiv T_{/1}} + \frac{1}{2m} g^{11} p_1^2 + V(q^1) \quad (5-2)$$

$$\text{Impuls: } p_1 = \pm \sqrt{2mg_{11} (E - T_{/1} - V(q^1))}$$

$$\text{Zeitablauf: } t - t_0 = \int_{t_0}^t dt' = \int_{t_0}^t \overbrace{\frac{m \dot{q}^1}{g^{11} p_1}}^{1=} dt' = \pm \int_{q^1(t_0)}^{q^1(t)} \frac{m}{\sqrt{2mg^{11} (E - T_{/1} - V(q^1))}} dq'^1$$

$$\text{Bahnkurve: } q^1(t) \quad (\text{durch Auflösen des Zeitablaufs})$$

Dazu muss die Hamilton-Jacobi-Gleichung nicht gelöst werden. Es reicht, gemäß (4-5) die Energie E als Konstante der Bewegung zu betrachten.

Hamiltonsche Bewegungsgleichung (HG)

Auf der Grundlage der Hamilton-Jacobi-Gleichung in (4-4) kann die Dynamik von Ort und Impuls eines Punktteilchens ganz allgemein bestimmt werden. Wir führen zunächst die Hamilton-Funktion $H(\vec{q}, \vec{p})$ ein und bringen diese in Zusammenhang mit den Zeitableitungen der Freiheitsgrade \vec{q}, \vec{p} .

$$\text{Hamilton-Funktion: } H(\vec{q}, \vec{p}) \equiv \frac{1}{2m} g^{ij} p_i p_j + V(\vec{q}(t)) \quad (5-3)$$

$$\text{Impuls-Ort: } \vec{p} = m \dot{\vec{q}}$$

$$\text{also: } \dot{q}^i = \frac{1}{m} g^{ij} p_j = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Damit folgt auch die Impulsdynamik:

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^j} \underbrace{\dot{q}^j}_{\frac{\partial H}{\partial p_j}} = \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial t} + \underbrace{\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^j} \frac{\partial H}{\partial p_j}}_{=\frac{d}{dq^k} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + H \right) = \frac{d}{dq^k} 0} + \frac{\partial H}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \quad (5-4)$$

$$\text{also: } \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q^i}$$

Dies ist die bekannte Formulierung der klassischen Mechanik in Form der **HG**.

$$\text{HG: } \begin{cases} \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases} \quad (5-5)$$

Zyklische Variablen

Hängt die Energiefunktion von einer Koordinate q^i nicht ab, dann ist der konjugierte Impuls eine Erhaltungsgröße oder eine Konstante der Bewegung.

$$q^i \text{ zyklisch: } H \neq F(q^i) \quad (5-6)$$

$$HG: \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} = 0$$

$$\text{also Impulserhaltung: } p_i = \text{konstant}$$

Holonome Zwangsbedingungen

Zwangsbedingungen, wie etwa die konstante Länge eines Pendels, erlauben, den konjugierten Impuls aus der Energiefunktion zu eliminieren. Damit ergibt sich dann die Dynamik der restlichen Freiheitsgrade.

$$\text{Zwangsbedingung: } \dot{q}^i = 0 \quad (5-7)$$

$$HG: \quad \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0$$

$$\text{Auflösen nach } p_i: \quad p_i = -g_{ii} \sum_{k \neq i} g^{ik} p_k$$

$$\text{Energiefunktion: } H_i \equiv H \Big|_{p_i = -g_{ii} \sum_{k \neq i} g^{ik} p_k}$$

$$\text{Neue HG: } \begin{cases} \dot{q}^k = \frac{\partial H_i}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\frac{\partial H_i}{\partial q^k} \end{cases}, \quad k \neq i$$

Rheonome Zwangsbedingungen

$$\text{Rheonome ZB.: } q^i(t) = \underbrace{g(t)}_{\text{gegeben}} \quad (5-8)$$

$$\text{Ableitung: } \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m} g^{ij} p_j = \dot{g}$$

$$\text{Auflösen nach Impuls: } f \equiv p_i = g_{ii} \left(m\dot{g} - \sum_{j \neq i} g^{ij} p_j \right)$$

$$\text{Wirkungsdifferential: } dS = \left(\sum_{j \neq i} p_j \dot{q}^j + \underbrace{f\dot{g} - H}_{\equiv -E_G} \Big|_{p_i=f} \right) dt$$

$$HG: \quad \begin{cases} \dot{q}^j = \frac{\partial H_G}{\partial p_j} \\ \dot{p}^j = -\frac{\partial H_G}{\partial q^j} \end{cases} \quad j \neq i$$

Vielteilchensysteme und kontinuierliche Massenverteilungen

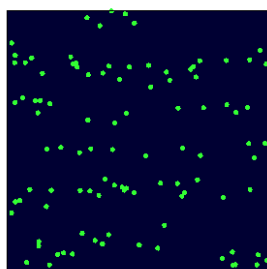
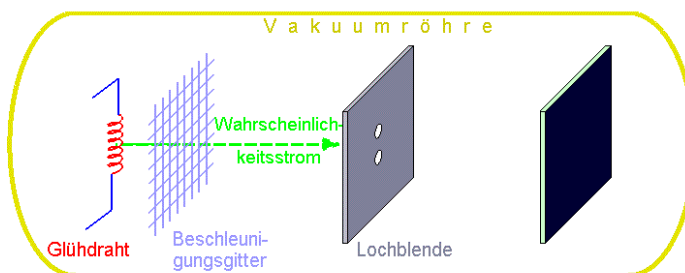
Durch Wahl geeigneter Koordinaten lassen sich auch komplexere Probleme mit den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen behandeln. Sie sind nicht auf Einteilchenprobleme beschränkt (siehe Beispiele)

6. Quantenmechanik

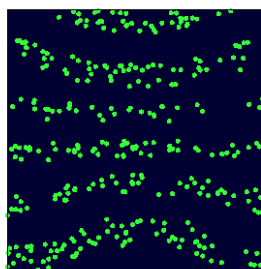
Die Hamilton-Jacobi-Gleichung (4-4) beschreibt die Dynamik der Bewegung auf ganz allgemeiner Grundlage. Wie ändert sich ein Bewegungszustand mit der Zeit bei einer vorgegebenen Ortsabhängigkeit. Dies beruht allein auf der Lorentz-Invarianz. Diese Dynamik muss aber noch mit einem physikalischem Inhalt versehen werden. Was ist es, das sich bewegt?

In der Klassischen Mechanik bewegen sich Massenpunkte auf Bahnkurven, was auf den ersten Blick sehr wirklichkeitsnah erscheint, auf den zweiten jedoch nicht. Die genaue Position eines Teilchens zu einem genauen Zeitpunkt gibt es nicht wirklich, nur als Mittelwert. Und punktgenaue Geschwindigkeit gibt es auch nicht, nur mittlere Geschwindigkeiten. Und die Unschärfe von Ort und Geschwindigkeit eines Teilchens hat ein Mindestmaß, das mit dem Planckschen Wirkungsquantum zusammenhängt.

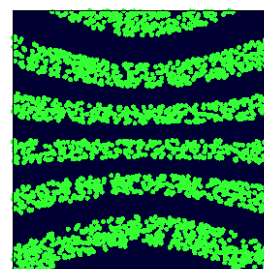
Untersucht man die Bewegung eines Elektrons etwa in einer Braunschen Röhre, so hat man von dem Untersuchten überhaupt keine Wahrnehmung. So gesehen ist es schon verwunderlich anzunehmen, dass ein Teilchen von der Quelle zum Detektor fliegt, womöglich auf einer Bahnkurve. Es werden offensichtlich klassische Bilder in die Röhre hineinprojiziert.



Speicherschirm nach 1 Sek.



Speicherschirm nach 3 Sek.



Speicherschirm nach 25 Sek.

Abbildung 6-1: Braunsche Röhre mit Glühdraht, Beschleunigungsgitter, Lochblende und Bildschirm. Am Glühdraht werden Impuls und Energie emittiert, am Bildschirm treten diese wieder in Erscheinung. Von einem Elektronenteilchen ist nichts zu sehen. Am Bildschirm zeigen sich einzelne Einschläge wie von Teilchen. Viele unabhängige Ereignisse bilden mit der Zeit auf dem Bildschirm ein Interferenzmuster. Dies ist ein typisches Wellenphänomen und mit der klassischen Vorstellung von Elektronen-Teilchen nicht vereinbar.

Offensichtlich ist in der Braunschen Röhre eine Quelle, die Energie und Impuls abstrahlt, und ein Detektor, bei dem diese wieder in Erscheinung treten. Dazwischen besteht ein Kausalzusammen-

hang, der objektiv oder kontextunabhängig ist; dasselbe Experiment kann immer und überall und von jedem mit demselben statistischen Ergebnis durchgeführt werden.

Zur Beschreibung lassen wir einen Wahrscheinlichkeitsstrom von der Quelle zum Detektor fließen, der den abstrakten Bewegungsregeln der Hamilton-Jacobi-Gleichung unterliegt.

$$\begin{aligned} \text{Hamilton-Jacobi-Gleichung} \quad & \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \underbrace{(\vec{\nabla} S)^2}_{\substack{\text{Kinetische Energie} \\ p^2}} + \underbrace{Q}_{\substack{\text{Zustands-} \\ \text{Energie}}} + \underbrace{V}_{\substack{\text{Potentielle} \\ \text{Energie}}} = 0 & (6-1) \\ \\ \text{Kontinuität des Wahr-} & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \rho \cdot \underbrace{\frac{\vec{\nabla} S}{m}}_{\substack{= \frac{\vec{p}}{m} \\ = \vec{v}}} = 0 \\ \text{scheinlichkeitsstromes:} & \end{aligned}$$

Neben der Potentiellen Energie V enthält die Hamilton-Jacobi-Gleichung eine Zustandsenergie Q , die wir gleich noch näher betrachten. Sie macht den Unterschied zwischen klassischer statistischer Mechanik und Quantenmechanik aus.

ρ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Ansprechen eines Detektors. Die Kontinuitätsgleichung drückt die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit aus: die Ausbreitung der Messwahrscheinlichkeit darf keinerlei Willkür unterliegen, sie darf ohne Grund nicht einfach größer oder kleiner werden. Sonst wäre das Phänomen nicht bewusstseinsfähig.

(6-1) besteht aus zwei nichtlinearen, gekoppelten Differentialgleichungen. Diese sind sehr schwer zu lösen. Durch einen mathematischen Trick können diese in eine lineare, komplexe Gleichung umgeschrieben werden.

$$\text{Quantenfeld oder Wellenfunktion:} \quad \psi(\vec{r}, t) = \underbrace{\sqrt{\rho(\vec{r}, t)}}_{\substack{= R(\vec{r}, t) \\ \text{Wahrscheinlich-} \\ \text{keitsamplitude}}} e^{iS(\vec{r}, t)/\hbar} \quad (6-2)$$

\hbar ist das Planksche Wirkungsquantum. Es ist sozusagen der Maßstab, mit dem die Wirkung S gemessen wird. In der Heisenbergschen Unschärferelation sieht man, dass es sich um die maximal mögliche Messgenauigkeit handelt. In der Unschärfe jenseits von \hbar existieren etwa die Atome.

Im nächsten Schritt bringen wir die Energie und den Impuls in Zusammenhang mit Differentialoperatoren, die auf das Quantenfeld ψ wirken. Dazu betrachten wir Mittelwerte.

$$\begin{aligned} \text{Mittlere Energie:} \quad \bar{E} & \equiv \int E \rho d^3 r = \int \underbrace{\psi^*}_{R e^{-iS/\hbar}} \underbrace{E}_{\left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}\right)} \underbrace{\psi}_{R e^{iS/\hbar}} d^3 r = \int \psi^* \left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar}{iR} \frac{\partial R}{\partial t} \right) \psi d^3 r & (6-3) \\ & = \int \underbrace{\psi^* \left(-\frac{\hbar}{i} \right) \frac{\partial}{\partial t} \psi}_{\substack{= \hat{E} \text{ Energie-} \\ \text{Operator}}} d^3 r + \frac{\hbar}{i} \int \underbrace{R \frac{\partial R}{\partial t}}_{= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \rho d^3 r = 0} d^3 r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Mittlerer Impuls: } \bar{\vec{p}} &\equiv \int \vec{p} \rho d^3 r = \int \psi^* \underbrace{\vec{p}}_{(\vec{\nabla} S)} \psi d^3 r = \int \psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{\hbar}{iR} (\vec{\nabla} R) \right) \psi d^3 r \\
&= \int \psi^* \underbrace{\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}}_{\substack{\hat{\vec{p}} \text{ Impuls-} \\ \text{Operator}}} \psi d^3 r - \frac{\hbar}{i} \underbrace{\int R \frac{\partial R}{\partial t} d^3 r}_{\substack{= \frac{1}{2} \int \vec{\nabla} \rho d^3 r = \frac{1}{2} \int \rho d^2 \vec{r} = 0}}
\end{aligned} \tag{6-4}$$

Soweit führen wir also eine Transformation von den reellen Größen Wirkungsfeld und Wahrscheinlichkeitsdichte zum komplexen Quantenfeld oder Wellenfeld aus und ersetzen die Energie- und Impulsfelder durch Operatoren auf das Quantenfeld. Dabei bleiben die Mittelwerte gleich.

$$\text{Transformation: } \underbrace{S, \rho}_{\substack{\text{Wirkungsfeld,} \\ \text{Wahrscheinlich-} \\ \text{keitsdichte}}} \rightarrow \underbrace{\psi = R e^{iS/\hbar}}_{\substack{\text{Quantenfeld,} \\ \text{Wellenfunktion}}} \tag{6-5}$$

$$\text{Energieoperator: } E \rightarrow \hat{E} \equiv \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \underbrace{\langle \hat{E} \rangle}_{\substack{\text{Mittelwert,} \\ \text{Erwartungswert}}} \equiv \int \psi^* \hat{E} \psi d^3 r = \bar{E}$$

$$\text{Impulsoperator: } \vec{p} \rightarrow \hat{\vec{p}} \equiv \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}, \quad \underbrace{\langle \hat{\vec{p}} \rangle}_{\substack{\text{Mittelwert,} \\ \text{Erwartungswert}}} \equiv \int \psi^* \hat{\vec{p}} \psi d^3 r = \bar{\vec{p}}$$

Für andere Größen bleiben die Mittelwerte oder auch Erwartungswerte nicht gleich, etwa wenn wir das Impulsquadrat durch das Quadrat des Impulsoperators ersetzen.

$$\text{Mittleres Impulsquadrat: } \langle \hat{\vec{p}}^2 \rangle = \int \psi^* \hat{\vec{p}}^2 \psi d^3 r = -\hbar^2 \int \psi^* \Delta \psi d^3 r = \hbar^2 \int (\vec{\nabla} \psi^*) (\vec{\nabla} \psi) d^3 r \tag{6-6}$$

$$\begin{aligned}
&= \hbar^2 \int \left(\frac{\vec{\nabla} R}{R} - \frac{i \vec{\nabla} S}{\hbar} \right) \left(\frac{\vec{\nabla} R}{R} + \frac{i \vec{\nabla} S}{\hbar} \right) \psi^* \psi d^3 r \\
&= \hbar^2 \int \left(\left(\frac{\vec{\nabla} R}{R} \right)^2 - \left(\frac{\vec{\nabla} S}{\hbar} \right)^2 \right) \rho d^3 r \\
&= \hbar^2 \underbrace{\int \left(\frac{\vec{\nabla} R}{R} \right)^2 \rho d^3 r}_{= \int (\vec{\nabla} R)^2 d^3 r = - \int R \Delta R d^3 r = - \int \psi^* \frac{\Delta R}{R} \psi d^3 r} + \underbrace{\int (\vec{\nabla} S)^2 \rho d^3 r}_{\bar{\vec{p}}^2}
\end{aligned}$$

$$\text{Mittlere kinetische Energie: } \left\langle \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} \right\rangle = \frac{\bar{\vec{p}}^2}{2m} + \langle Q \rangle, \quad \text{mit } Q = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta R}{R}}_{\substack{\text{Zustandsenergie,} \\ \text{Bohmsches Quantenpotential}}}$$

Wir sehen: ersetzt man in der kinetischen Energie den Impulsvektor durch den Impulsoperator, generiert man im Mittel einen zusätzlichen Energieterm, der explizit von der Wahrscheinlichkeitsampli-

tude abhängt. So etwas gibt es in der klassischen Physik nicht. Hier erscheint auch das Plancksche Wirkungsquantum.

Quantisierung

Ohne die Zustandsenergie Q beschreiben die Gleichungen in (6-1) eine klassische statistische Mechanik. Durch das Ersetzen von Energie- und Impulsfeld durch Operatoren auf das Quantenfeld führt man indirekt das Zustandspotential Q ein. Dieses Potential führt zu allen Phänomenen, die für die Quantenmechanik spezifisch sind, also Wellen-Teilchendualismus, Nichtlokalität, Heisenbergsche Unschärferelationen, Zerfließen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Wellenpaketen) und so weiter.

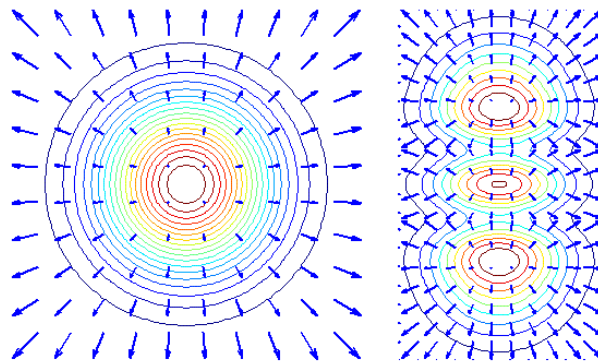


Abbildung 6-2: Beitrag der Wahrscheinlichkeitsamplitude zum Impuls bei einer Gaußverteilung und einer Überlagerung zweier Gaußverteilungen mit Interferenz; Die Kreise sind Höhenlinien der Verteilungen und die Pfeile sind Impulsvektoren. Klassisch sind diese Impulse nicht vorhanden. Sie sind Folge der Quantisierung und führen zum Zerfließen der Verteilung. Diese Impulse sind nicht proportional zum Gradienten, da in (6-4) ja durch die Amplitude geteilt wird.

Die Zustandsenergie Q berücksichtigt die Bewegungsenergie von etwas nichtmateriellem, von etwas, das die Bewegungsmöglichkeiten statistisch umfasst. Dies ist sehr merkwürdig. In einem biologischen Gewebe etwa muss diese Wahrscheinlichkeitsamplitude sehr komplex und für die Funktionsmöglichkeiten sehr wichtig sein.

Die Gleichungen (6-1) mit Zustandsenergie sind mathematisch äquivalent zur Schrödinger-Gleichung und stellen damit die Grundgleichungen der Quantenmechanik dar. Das zeigen wir nun. Die Gleichungen in (6-1) sind viel schwerer zu lösen als die Schrödinger-Gleichung, aber sie haben eine klare Interpretation und sind daher von unschätzbarem Wert.

Umschreiben der Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned} \text{Kontinuitätsgleichung: } 0 &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \frac{\vec{\nabla} S}{m} \right) = 2R \frac{\partial R}{\partial t} + 2R \vec{\nabla} R \frac{\vec{\nabla} S}{m} + R^2 \frac{\Delta S}{m} & (6-7) \\ &= 2R^2 \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\vec{\nabla} R \cdot \vec{\nabla} S}{R m} + \frac{\Delta S}{2m} \right) \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\text{Gradient: } \vec{\nabla} \psi = e^{iS/\hbar} \left(\vec{\nabla} R + \frac{i}{\hbar} R \vec{\nabla} S \right) \quad (6-8)$$

$$\begin{aligned} \text{Laplace: } \Delta \psi &= e^{iS/\hbar} \left(\Delta R + \frac{i}{\hbar} \vec{\nabla} R \vec{\nabla} S + \frac{i}{\hbar} R \Delta S + \left(\frac{i}{\hbar} \vec{\nabla} S \right) \left(\vec{\nabla} R + \frac{i}{\hbar} R \vec{\nabla} S \right) \right) \\ &= \psi \left(\frac{\Delta R}{R} + 2 \frac{i}{\hbar} \frac{(\vec{\nabla} R) \vec{\nabla} S}{R} - \frac{1}{\hbar^2} (\vec{\nabla} S)^2 + \frac{i}{\hbar} \Delta S \right) \end{aligned}$$

Zusammenfassung von Hamilton-Jacobi-Gleichung und Kontinuitätsgleichung

Komplexe Addition: (6-9)

$$\begin{aligned} \psi \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla} S)^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta R}{R} + V \right)}_{=0 \text{ (Hamilton-Jacobi-Gleichung)}} + \psi \underbrace{\frac{\hbar}{i} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\vec{\nabla} R \vec{\nabla} S}{R} + \frac{\Delta S}{2m} \right)}_{=0 \text{ (Kontinuitätsgleichung)}} = 0 \\ \text{also: } \underbrace{\frac{\hbar}{i} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial t} \right)}_{\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi} \psi + \frac{\hbar^2}{2m} \underbrace{\left(-\frac{\Delta R}{R} - 2 \frac{i}{\hbar} \frac{(\vec{\nabla} R) \vec{\nabla} S}{R} + \frac{(\vec{\nabla} S)^2}{\hbar^2} - \frac{i}{\hbar} \Delta S \right)}_{-\Delta \psi} \psi + V \psi = 0 \end{aligned}$$

Das ist die

$$\text{Schrödinger-Gleichung: } -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi \quad (6-10)$$

Damit ist gezeigt, dass Quantenmechanik auf der HJG mit Zustandspotential und der Kontinuität des Wahrscheinlichkeitsstromes beruht. Damit hat die Schrödinger-Gleichung eine klare Bedeutung.

7. Wechselwirkung

Wechselwirkung wurde in der HJG in (4-4) als Potential eingeführt. Damit wurde die Lorentz-Invarianz verletzt und das soll hier überdacht werden.

Das Impulsfeld oder das Wirkungsfeld als Impulspotential beschreibt Bewegung. Und diese kann sich ändern. Um das zu sehen, muss man einfach einen Gegenstand los lassen. Aus dem Ruhezustand heraus nimmt er Bewegung auf und fällt zu Boden. Mehr ist nicht zu beobachten. Und diese Beobachtung kann mathematisch formuliert werden auf der Grundlage von Kontextunabhängigkeit bzw. Objektivität bzw. Lorentz-Invarianz.

Wenn sich der Impuls ändert, dann hat die entsprechende Impulskomponente einen Gradienten. Dieser Impulsgradient darf keinerlei Willkür unterliegen, er muss erhalten sein, also einer Kontinuitätsgleichung unterliegen.

Invariante Formulierung der Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned} \text{Kontinuitätsgleichung:} \quad 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \rho + \text{div}(\rho \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial ct} \underbrace{\rho \gamma^{-1}}_{\equiv \rho_0} \underbrace{\gamma c}_{\equiv v^4} + \text{div} \left(\underbrace{\rho \gamma^{-1}}_{\equiv \rho_0} \underbrace{\vec{\gamma}}_{(v^\mu)_{\mu=1..3}} \right) \\ &= \text{div}^{(4)}(\vec{j}^{(4)}), \quad j^\mu \equiv \rho_0 v^\mu \end{aligned} \quad (7-1)$$

$$\text{mit invarianter Dichte: } \rho dV = (\rho \gamma^{-1})(\gamma dV) = \rho_0 dV_0, \quad \left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \right)$$

Änderung des Bewegungszustandes

$$\text{Impuls ist i.A. nicht konstant: } \text{grad}^{(4)}(p_\mu) \neq 0 \quad (7-2)$$

$$\begin{aligned} &\text{Kontinuität des} \\ &\text{Impulsgradienten:} \quad \underbrace{\text{div}^{(4)} \text{grad}^{(4)}(p_\mu)}_{\equiv \square p_\mu} = 0 \quad (\text{außer an Quellpunkten}) \end{aligned}$$

$$\text{also:} \quad \square p_\mu = j_\mu^{\text{Quelle}}$$

Beispiel: Stationär mit ruhender Punktquelle

$$\text{Potential-Gleichung: } \square p_\mu = j_\mu^{Quelle} \quad (7-3)$$

$$\text{stationär: } \begin{cases} \square p_\mu \rightarrow \Delta p_\mu \\ j_\mu^{Quelle} = \rho(\vec{v}, c) \rightarrow \rho(\vec{0}, c) \end{cases}$$

$$\text{ruhende Punktladung: } j_\mu(\vec{r}) \rightarrow j_4(\vec{r}) \rightarrow q\delta(\vec{r}), \quad q: \text{Ladung}$$

$$\text{also: } \Delta p_4 = e\delta(\vec{r}), \quad \underbrace{\int \Delta p_4 d^3r}_{= \int \vec{\nabla}_{p_4} \cdot d^2\vec{f} = 4\pi r^2 \vec{\nabla}_{p_4}} = q \underbrace{\int \delta(\vec{r}) d^3r}_1$$

(mit Rotationssymmetrie)

$$\text{Coulomb-Potential,} \quad \vec{\nabla} p_4 = \frac{q}{4\pi r^2}, \quad \underbrace{p_4}_{\substack{= E \\ = \frac{E}{c}}} = -\frac{q}{4\pi} \frac{1}{r}$$

Wir bekommen so bekannte physikalische Zusammenhänge.

Der Viererimpuls ist allerdings nicht frei manipulierbar, er ist von vornherein festgelegt durch die Lorentz-Invarianz und hat die konstante Länge $m_0 c$. Um den Impulsgradienten in (7-2) zu ermöglichen, führt man üblicherweise ein neues Vektorpotential $\vec{A}^{(4)}$ ein. Dem kann man den Gradienten zuordnen und so indirekt das richtige Verhalten des beobachteten Impulses erreichen. Das ganze bezeichnet man als 'Minimale Substitution'. Im nächsten Abschnitt über 'Raumkrümmung' betrachten wir dann ein Verfahren, dass ohne dieses zusätzliche Feld $\vec{A}^{(4)}$ auskommt.

Elektrodynamik, Gravitation

Die 'Minimale Substitution' und die Kontinuität des Gradienten führen zur bekannten Potentialgleichung, also zur Lorentz-Invarianten Darstellung der Maxwell-Gleichungen. Die Maxwell-Gleichungen ergeben sich daraus durch die geeignete Definition der elektrischen und magnetischen Felder.

$$\text{'Minimale Substitution': } \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q^\mu} = p_\mu \rightarrow \underbrace{p_\mu + \overbrace{q}^{\text{Ladung}} A_\mu}_{\substack{\text{Erhaltener Lorentz-Skalar ist nun} \\ (\vec{p}^{(4)} + \vec{A}^{(4)})^2 = m_0^2 c^2}}, \quad \vec{A}^{(4)} = (\vec{A}, \phi / c) \quad (7-4)$$

$$\text{Potential-Gleichungen: } \square A_\mu = j_\mu, \quad \vec{j}^{(4)} = \rho(\vec{v}, c) = \rho_0 \vec{v}^4$$

$$\text{Äquivalent zu den} \quad \text{mit } \begin{cases} \text{Elektrischem Feld: } \vec{E} \equiv -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial}{\partial ct} \vec{A} \\ \text{Maxwell-Gleichungen: } \text{Magnetischem Feld: } \vec{B} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{cases}$$

Der Zusammenhang zwischen Maxwell-Gleichungen und Potentialgleichungen wird in jedem ED-Lehrbuch beschrieben.

Allgemeine Lösung für das stationäre Problem

Stationär: $\square A_\mu = j_\mu \rightarrow \Delta A_\mu = j_\mu$ (7-5)

Vektorpotential: $\Delta \vec{A}(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r})$

Allgemeine Lösung: $\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'$

Beweis:

mit: $\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$

ist: $\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') \underbrace{\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{-4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')} d^3 r' = \vec{j}(\vec{r})$

8. Raumkrümmung

Im letzten Abschnitt wurde die Impulsänderung durch ein Vektorpotential beschrieben, das in unserer Wahrnehmung nicht existiert. Es beruht eigentlich auf einem mathematischen Trick, mit dem die Konstanz des Impulses aufgrund der Lorentz-Invarianz aufgeteilt wird auf einen Feldanteil und einen Teilchenanteil. Ihre Summe bleibt erhalten

Es geht auch ohne diesen Trick und ohne die Einführung zusätzlicher Felder, die in der Natur nicht gefunden werden.

Die Grundlage unserer bewussten Welterfahrung ist der Raum. Auch der Raum existiert nicht objektiv, also unabhängig vom Beobachter. Er wird vielmehr von uns unbewusst geschaffen, um die Welt bewusst erleben zu können. Der Raum ist die Grundlage aller physikalischen Welterfahrung- und Beschreibung und wird als mathematische Struktur hier in den ersten Kapiteln beschrieben. Es scheint nun sehr natürlich, die Impulsgradienten auf die Struktur des Raumes zurückzuführen. Dieser wird von uns unbewusst so geschaffen, dass Impulsgradienten existieren, auch im Rahmen der Lorentz-Invarianz.

Eine Raumkrümmung bewirkt Fliehkräfte, die Äquivalent sind zu den aus dem Vektorpotential A resultierenden Kräften.

Freie Bewegung im Riemannschen Raum

$$\text{Änderung des Ortes: } 0 = \frac{d^2 \vec{r}^{(4)}}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \underbrace{\frac{\partial^2 \vec{r}^{(4)}}{\partial q^\mu}}_{\vec{g}_\mu^{(4)}} \dot{q}^\mu = \underbrace{\frac{\partial^2 \vec{r}^{(4)}}{\partial q^\nu \partial q^\mu}}_{\frac{\partial \vec{g}_\mu^{(4)}}{\partial q^\nu}} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu + \underbrace{\frac{\partial \vec{r}^{(4)}}{\partial q^\mu}}_{\vec{g}_\mu^{(4)}} \ddot{q}^\mu \quad (8-1)$$

$$\text{also: } \vec{g}_\mu^{(4)} \ddot{q}^\mu = - \frac{\partial \vec{g}_\mu^{(4)}}{\partial q^\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu$$

$$\text{Beschleunigung: } \dot{v}^\lambda = - \underbrace{\Gamma_{\mu\nu}^\lambda}_{\text{Christoffel-Symbole}} v^\mu v^\nu$$

$$\text{BG: } \frac{d}{d\tau} p_\mu = -m_0 g_{\mu\lambda} \Gamma_{\kappa\nu}^\lambda v^\kappa v^\nu$$

Äquivalenzprinzip

Ob eine Beschleunigung auf einem Vektorpotential A oder auf Zentrifugalkräften eines gekrümmten Raums beruhen, lässt sich experimentell nicht entscheiden, sie sind äquivalent.

$$\begin{aligned}
 \text{Bewegungsgleichung: } \frac{d}{d\tau} p_\mu &= - \underbrace{\frac{dA_\mu(\vec{r}^{(4)}(\tau))}{d\tau}}_{\substack{\text{Ladung} \\ \hat{q}}} \underbrace{\frac{\partial A_\mu}{\partial q^\nu}}_{\substack{\text{Ebener Raum mit Gravitationsfeld}}} v^\nu = \underbrace{-m_0 g_{\mu\lambda} \Gamma_{\kappa\nu}^\lambda v^\kappa v^\nu}_{\substack{\text{Gekrümmter Raum ohne Feld}}} \quad (8-2) \\
 \text{Äquivalenz: } q \frac{\partial A_\mu}{\partial q^\nu} v^\nu &= m_0 g_{\mu\lambda} \Gamma_{\kappa\nu}^\lambda v^\kappa v^\nu \\
 \text{oder: } q \frac{\partial A_\mu}{\partial q^\nu} &= m_0 g_{\mu\lambda} \Gamma_{\kappa\nu}^\lambda v^\kappa
 \end{aligned}$$

Gekrümmte Raumzeit und Schwarzschild-Metrik

Für die sogenannten 'Normalform' einer durch eine Punktladung gekrümmten Raumzeit benutzt man Kugelkoordinaten, wobei sich die Krümmung nur auf die Radialrichtung und die Zeit bezieht. Zum Ortsvektor senkrechte Koordinaten bleiben in ihrer ursprünglichen Form. Für große Abstände zur Quelle des Impulsgradienten soll der Raum eben werden.

$$\begin{aligned}
 \text{Ansatz für Quadrat des Linienelements: } (ds)^2 &\equiv (d\vec{r}^{(4)})^2 = \underbrace{A^M(r)}_{\equiv g_{rr}} (dr)^2 + \underbrace{r^2}_{\equiv g_{\vartheta\vartheta}} (d\vartheta)^2 + \underbrace{r^2 \sin^2 \vartheta}_{\equiv g_{\varphi\varphi}} (d\varphi)^2 - \underbrace{B^M(r)}_{\equiv g_{ct,ct}} (d\tau)^2 \quad (8-3) \\
 &\quad \text{Normalform}
 \end{aligned}$$

$$\text{mit: } \lim_{r \rightarrow \infty} A^M(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B^M(r) = 1$$

Wir betrachten den Impulsgradienten aufgrund einer ruhenden Punktquelle:

$$\begin{aligned}
 \text{Impulsgradient: } \underbrace{q}_{\text{Ladung}} \frac{\partial p_4}{\partial q^r} &= -m_0 \underbrace{g_{4\lambda}}_{-B^M \delta_{\lambda 4}} \Gamma_{\kappa r}^\lambda v^\kappa \quad (8-4) \\
 q \frac{\partial p_4}{\partial r} &= m_0 B^M v^\kappa \underbrace{\Gamma_{\kappa r}^4}_{\frac{1}{2B^M} \frac{\partial B^M}{\partial r} \delta_\kappa^r}
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die

$$\text{Bestimmungsgleichung: } \frac{\partial B^M}{\partial r} = \frac{2e^2}{\underbrace{m_0 c^2}_{r_s}} \frac{1}{r^2} \quad (8-5)$$

$$\text{Schwarzschild-Radius: } r_s \equiv \frac{2e^2}{m_0 c^2}$$

$$\text{also: } B^M = 1 - \frac{r_s}{r} = \frac{r - r_s}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1$$

Die räumliche Komponente der Schwarzschild-Metrik bekommt man aus der Invarianz des Volumenelements bezüglich Raumkrümmungen.

Invariantes
 Volumenelement: $dV = \sqrt{\det(g_{\mu\nu})} d^4q = \underbrace{iA^M B^M r^2 \sin \vartheta d^4q}_{\text{Invarianz}} = ir^2 \sin \vartheta d^4q$ (8-6)

also: $A^M = \frac{1}{B^M} = \frac{r}{r-r_s}$

Ruhende Uhr im Gravitationsfeld

Aus der Ruhebedingung für eine Uhr im gekrümmten Raum bekommt man die Beziehung des invarianten Zeitdifferentials $d\tau$ zum globalen Zeitdifferential dt .

Ruhebedingung: $dr = d\vartheta = d\varphi = 0$ (8-7)

Invariantes Linienelement: $ds^2 = -c^2 d\tau^2 = \underbrace{g_{44}}_{-B^M} (dct)^2$

also: $d\tau = \sqrt{\frac{r-r_s}{r}} dt$

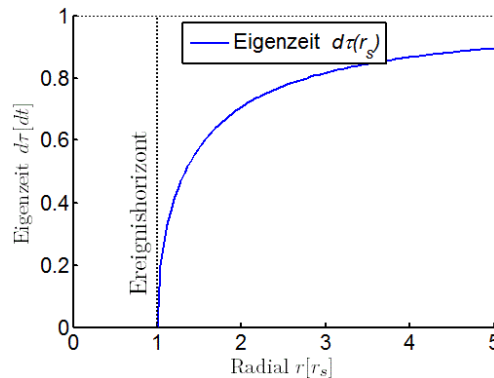


Abbildung 8-1 Ruhende Uhr im gekrümmten Raum. Auf dem Schwarzschildradius bzw. Ereignishorizont ($r=1$) geht die Uhr im Vergleich mit der globalen Zeit unendlich langsam.

Schwarzschild-Wurmloch

Die Schwarzschild-Längendehnung kann durch Wölbung des Raumes in eine zusätzliche Raumdimension H dargestellt werden. Das Maß der Auswölbung in H -Richtung wird durch den Satz des Pythagoras so bestimmt, dass das Linienelement ds in der Figur die richtige Länge hat.

Bedingung für H : $ds^2 = dr^2 + dH^2 = -g_{rr} dr^2$

also: $dH = \pm \sqrt{\frac{-g_{rr}}{r} - 1} dr = \sqrt{\frac{r_s}{r-r_s}} dr$ (8-8)

Höhe: $H(r) = \pm \int_{H(r_s)}^{H(r)} dH = 2\sqrt{r_s} \sqrt{r-r_s}$

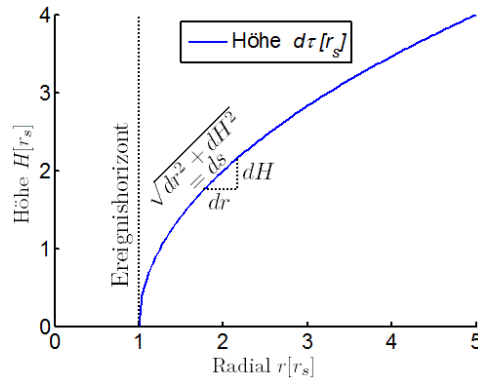


Abbildung 8-2: Darstellung der Raumkrümmung durch Wölbung in eine zusätzliche Dimension. Das Linienelement ds der Kurve hat für jedes r die richtige Länge. Auf dem Schwarzschildradius bzw. Ereignishorizont werden die Radialwege beliebig lange.

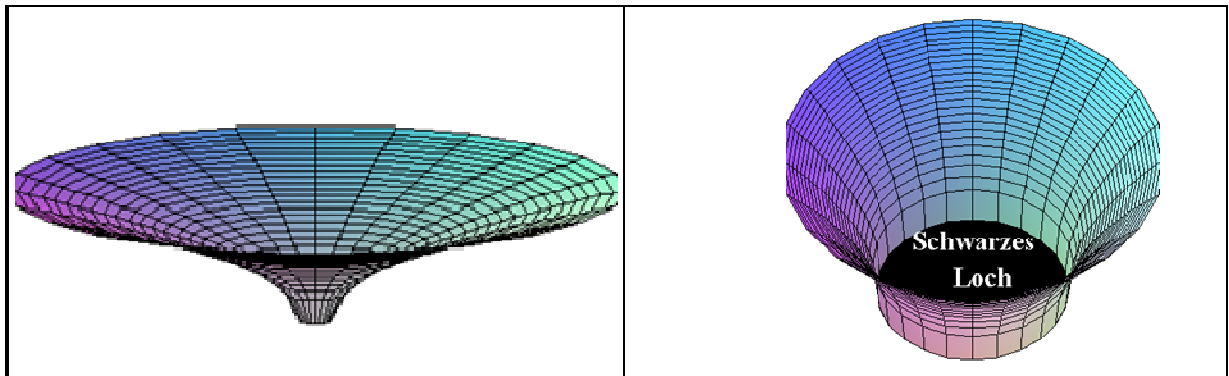


Abbildung 8-3: Darstellung der Raumkrümmung wie in Abbildung 8-2, jedoch rotationssymmetrisch.

Warum 'Schwarzes Loch'?

Lichtquellen in einem Gravitationsfeld haben für Außenstehende kleinere Frequenzen. Wir betrachten einen ruhenden Lichtdetektor im Punkt P_A in großer Entfernung der Quelle und eine ruhende Lichtquelle im Punkt P_B in der Nähe des Ereignishorizontes. Im Punkt P_B wird ein Lichtsignal mit der Frequenz ν_B erzeugt und im Punkt P_A wird es mit ν_A registriert. Diese registrierte Frequenz hängt von der Metrik ab.

$$\text{Verhältnis der Eigenzeiten: } \frac{d\tau_A}{d\tau_B} = \frac{\sqrt{g_{44}(r_A)} dt_A}{\sqrt{g_{44}(r_B)} dt_B} = \frac{\sqrt{B(r_A)} dt_A}{\sqrt{B(r_B)} dt_B} \quad (8-9)$$

$$\text{Periodenzeit: } dt_A = dt_B$$

$$\text{Periode } d\tau \text{ und Frequenz: } \nu = \frac{1}{d\tau}$$

$$\text{Registrierte Frequenz: } \nu_A = \nu_B \frac{\sqrt{g_{44}(r_B)} dt_B}{\sqrt{g_{44}(r_A)} dt_A} = \nu_B \frac{\sqrt{B(r_B)}}{\sqrt{B(r_A)}} \xrightarrow{r_A \rightarrow \infty} \nu_B \sqrt{\frac{r_B - r_s}{r_B}} \quad (8-10)$$

$$\text{Lichtquelle auf Ereignishorizont: } \nu_A = \nu_B \underbrace{\sqrt{\frac{r_B - r_s}{r_B}}}_{\text{Rotverschiebung}} \xrightarrow{r_B \rightarrow r_s} 0$$

Eine Lichtquelle auf dem Ereignishorizont kann in weiter Entfernung nicht registriert werden. Der Ereignishorizont erscheint als Schwarzes Loch.

Hinweis:

Die Schwarzschild-Metrik und die Verhältnisse auf dem Ereignishorizont haben sich hier allein aus der Lorentz-Invarianz und der Annahme eines erhaltenen Impulsgradienten ergeben. Üblicherweise gewinnt man diese Ergebnisse aus den Einstein-Gleichungen der ART. Dort wird vor allem auch die Energie des Gravitationsfeldes berücksichtigt und führt zu einer komplizierten Nichtlinearität.

Hier wirft sich die Frage auf, ob diese Energie überhaupt zu berücksichtigen ist. Es sieht doch so aus, als wären Gravitationsfeld und Raumzeitkrümmung zwei äquivalente Konzepte, wobei jedoch das eine oder das andere gewählt wird. In den Einstein-Gleichungen der ART werden die Konzepte jedoch vermischt, sie werden gleichzeitig angewendet.

Die Einstein-Gleichungen liefern Aussagen für den Innenraum der Schwarzen Löcher, die jedoch nicht überprüfbar sind. Alle bisherigen Beobachtungen zur ART werden durch die Schwarzschild-Metrik richtig erklärt, und diese ergibt sich auch ohne die Einstein-Gleichungen.

Anhang: Christoffel-Symbole aus Metrik

Die Christoffel-Symbole sind in (8-1) über die Grundvektoren und deren Ableitungen definiert. Zur Beschreibung eines gekrümmten Raumes geht man in der Regel von der Metrik aus, nicht von Koordinatentransformationen und Grundvektoren. Daher drücken wir die Christoffel-Symbole durch die Metrik aus.

$$\text{mit: } \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial q^\nu} = \frac{\partial \bar{g}_\mu^{(4)}}{\partial q^\nu} \cdot \bar{g}_\kappa^{(4)} + \frac{\partial \bar{g}_\kappa^{(4)}}{\partial q^\nu} \cdot \bar{g}_\mu^{(4)} = \frac{\partial^2 \bar{r}^{(4)}}{\partial q^\nu \partial q^\mu} \cdot \frac{\partial \bar{r}^{(4)}}{\partial q^\kappa} + \frac{\partial^2 \bar{r}^{(4)}}{\partial q^\kappa \partial q^\nu} \cdot \frac{\partial \bar{r}^{(4)}}{\partial q^\mu} \quad (8-11)$$

$$\begin{aligned} \text{ist: } \quad & \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial q^\nu} + \frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial q^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\kappa} = 2 \frac{\partial^2 \bar{r}^{(4)}}{\partial q^\mu \partial q^\mu} \cdot \frac{\partial \bar{r}^{(4)}}{\partial q^\kappa} = 2 \frac{\partial \bar{g}_\mu^{(4)}}{\partial q^\nu} \cdot \bar{g}_\kappa^{(4)} \\ & \frac{\cancel{\frac{\partial^2 \bar{r}^{(4)}}{\partial q^\kappa \partial q^\nu} \cdot \frac{\partial \bar{r}^{(4)}}{\partial q^\mu}}}{\frac{\partial^2 \bar{r}^{(4)}}{\partial q^\mu \partial q^\nu} \cdot \frac{\partial \bar{r}^{(4)}}{\partial q^\kappa}} + \frac{\cancel{\frac{\partial^2 \bar{r}^{(4)}}{\partial q^\kappa \partial q^\mu} \cdot \frac{\partial \bar{r}^{(4)}}{\partial q^\nu}}}{\frac{\partial^2 \bar{r}^{(4)}}{\partial q^\mu \partial q^\nu} \cdot \frac{\partial \bar{r}^{(4)}}{\partial q^\kappa}} - \frac{\cancel{\frac{\partial^2 \bar{r}^{(4)}}{\partial q^\kappa \partial q^\nu} \cdot \frac{\partial \bar{r}^{(4)}}{\partial q^\mu}}}{\frac{\partial^2 \bar{r}^{(4)}}{\partial q^\mu \partial q^\nu} \cdot \frac{\partial \bar{r}^{(4)}}{\partial q^\kappa}} \\ & = 2 \frac{\partial \bar{g}_\mu^{(4)}}{\partial q^\nu} \cdot \bar{g}^{(4)\lambda} g_{\lambda\kappa} = 2 g_{\kappa\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \end{aligned}$$

$$\text{also: } \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} \left(\frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial q^\nu} + \frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial q^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\kappa} \right)$$

9. Referenzen

- [1] Kurt Bräuer: 'Mathematischer Vorbereitungskurs für das Physikstudium', www.kbraeuer.de –
Lehre - Mathematischer Vorbereitungskurs ...